Министерство образования Тульской области

Государственное профессиональное образовательное учреждение

Тульской области «Донской политехнический колледж»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для студентов, обучающихся по специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

ОП.10 Численные методы

по теме «Решение нелинейных уравнений с одним неизвестным»

Автор:

А.С. Тивиков, преподаватель ГПОУ ТО «ДПК»

2024 г.

Лист согласования:

Автор разработки:

Тивиков А.С., преподаватель ГПОУ ТО «ДПК»

Рецензенты:

Евтехова О.А., заместитель директора по учебной и научно- методической работе ГПОУ ТО «ДПК»

Панченко Т.А., заместитель директора по организации образовательного процесса ГПОУ ТО «ДПК»

Филатова Е.А., старший методист ГПОУ ТО «ДПК»

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование», изучающих курс «Численные методы» и содержит методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным на ЭВМ. Также представлены примеры решения задач и варианты контрольных заданий.

СОГЛАСОВАНО

на заседании предметной (цикловой) комиссии дисциплин профессионального цикла отделения «Информационные системы и программирование»

Протокол № 4

от «08» ноября 2024 г.

Председатель ПЦК Демихова И.Ю.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При проведении расчётов студент имеет дело с различными математическими зависимостями, в которых имеется неизвестная величина, требующая определения. Часто эту неизвестную величину не удаётся аналитически выразить и отыскать, или процесс аналитического поиска очень длителен. Тогда приходится обращаться к численным методам решения нелинейного уравнения на ЭВМ. Трудности, с которыми сталкивается студент и инженер при отыскании решения нелинейного уравнения с одним неизвестным, и послужили поводом при написании данного пособия.

Учебное пособие состоит из двух глав, в которых рассмотрены основные теоретические положения и особенности решения нелинейных уравнений с одним неизвестным в электронной таблице Excel.

В первой главе рассмотрены основные понятия теории решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Приведены особенности методов отделения и уточнения корней. Здесь же рассмотрены некоторые итерационные простые и комбинированные методы уточнения корней с теоретической точки зрения.

Во второй главе рассмотрены прикладные особенности решения задачи поиска корней нелинейных уравнений с одним неизвестным с использованием табличного процессора Microsoft Excel.

Каждый из разделов содержит примеры решения задач и подробные объяснения при отделении корней нелинейного уравнения, объяснения при использовании данного метода уточнения корней нелинейного уравнения, а также оценки точности полученных результатов.

Учебное пособие позволит студентам освоить и использовать на ЭВМ методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Основные понятия

Нелинейным уравнением называется зависимость вида $f(x)=0$ или $f_1(x)=f_2(x)$, где функции $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ нелинейные относительно переменной x (x в первой степени – линейны). Переменная x называется независимой переменной.

Корнем нелинейного уравнения называется такое значение независимой переменной x, при подстановке которого исходное уравнение обращается в тождество.

Решить нелинейное уравнение, значит, найти действительные значения корней в заданной области или в области определения функции.

Задача определения корней нелинейного уравнения может быть решена в 2 этапа:

1. Отделение корней, т.е. определения таких участков (отрезков) изменения независимой переменной x в пределах которых существует единственный корень заданного уравнения.
2. Уточнение корней, т.е. вычисление значения корня на выделенном ранее отрезке с заданной точностью.

1.2. Методы отделения корней

Существует 3 метода отделения корней: графический метод, аналитический метод и численный метод.

Чтобы ***графически*** отделить корни уравнения необходимо в декартовой системе координат XOY построить заданную функцию $y=f(x)$, если решается уравнение вида $f(x)=0$, и найти отрезки, в пределах которых эта функция пересекает ось x (Рис.1.1). Функция, изображенная на рисунке 1 пересекает ось три раза, т.е. уравнение $f(x)=0$ имеет 3 корня.

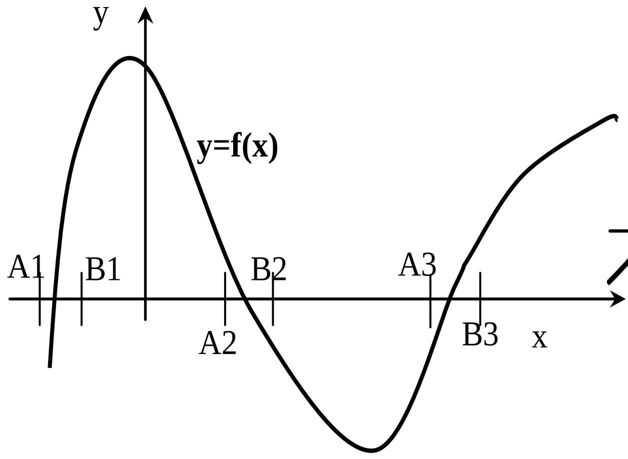


Рис. 1.1 Графическое отделение корней для уравнения вида f(x)=0.

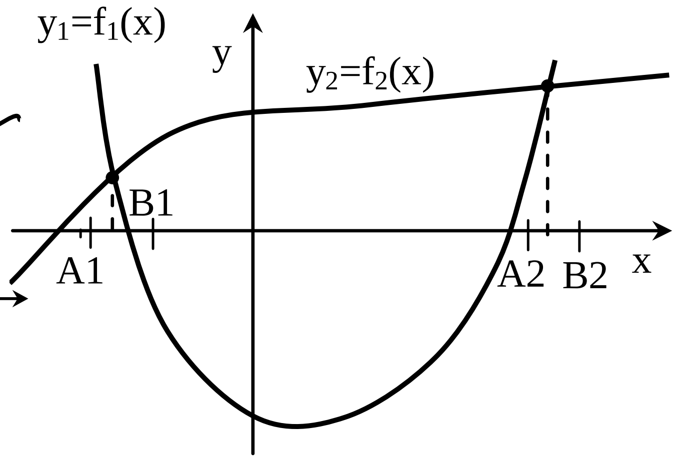


Рис. 1.2. Графическое отделение корней для уравнения вида $f_1(x)=f_2(x)$.

Если функция задана в виде $f_1(x)=f_2(x)$, то в декартовой системе строят две функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ и определяют точки пересечения этих функций (рис.1.2.). Отрезки выделяют на оси x в окрестности абсцисс точек пересечения.

Достоинства метода графического метода: простота, наглядность.

Недостатки метода: графическое отделение используется для построения простых функций, поведение которых известно.

При ***аналитическом*** отделении корней используются 2 теоремы:

I. Если функция на рассматриваемом отрезке [a,b] непрерывна и на концах этого отрезка имеет разные знаки, то на данном отрезке эта функция имеет нечетное число корней, а если знаки на концах одинаковы – на этом отрезке имеется четное число корней или их нет вообще. Математически теорему I можно записать в виде:

$$\begin{cases} f(a)\cdot f(b)<0 & \textit{нечётное число корней на отрезке}[a;b] \\ f(a)\cdot f(b)>0 & \textit{чётное число корней на отрезке}[a;b] \end{cases} \qquad (1)$$

II. Если на рассматриваемом отрезке [a,b] функция монотонна (или возрастая или убывая) и не имеет точек перегиба, то функция имеет на данном отрезке единственный корень, если на концах этого отрезка [a,b] знаки функции разные, и функция не имеет корней, если знаки функции одинаковые. Математически теорему II можно записать в виде:

Условие монотонности функции на отрезке [a;b] имеет вид:

$$\frac{d}{da}f(a)\cdot\frac{d}{db}f(b)>0 \qquad (2)$$

Условие того, что функция не имеет точек перегиба на отрезке [a;b] имеет вид:

$$\frac{d^2}{da^2}f(a)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b)>0 \qquad (3)$$

Алгоритм отделения корней аналитическим способом сводится к следующему:

1. Определяется область допустимых значений аргумента.
2. Этот диапазон разбивается на отрезки, в пределах которых функция монотонна. Для этого записывается выражение для 1-ой производной от заданной функции f(x) и определяется значение, при котором эта производная равна нулю f ’(x) = 0.
3. Определяются значения функции на концах всех выделенных отрезков.
4. Проверяется выполнимость теорем I,II на каждом из отрезков. При этом отрезки необходимо сузить так, чтобы теорема II выполнялась всегда.

Пример 1. Для функции x^2-5x+1=0 аналитически отделить корни.

Решение.

1. Определяем область допустимых значений аргумента $-\infty<x<\infty$

2. В этой области для $f(x)=x^2-5x+1$ находим её производную f1(x)=df(x)/dx=2x-5=0 и корень производной $x^*=2.5$. Строим участки возрастания - убывания функции f(x) в диапазоне (-∞ ;2.5] и [2.5; ∞) (рис.1.3).

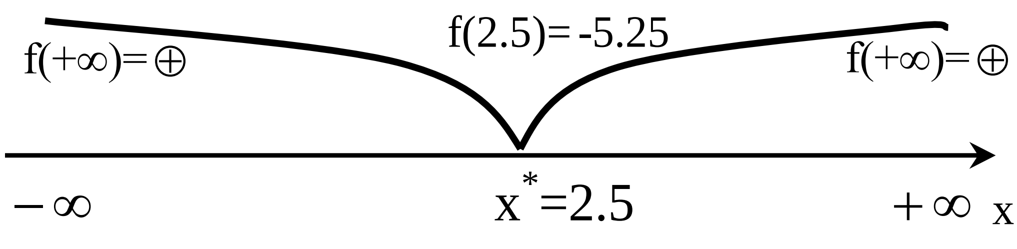


Рис. 1.3. Аналитическое отделение корней.

3. Значения функции $f(x)=x^2-5x+1$ в точках: $f(-\infty)=\infty>0$; $f(2.5)=6.25-12.5+1<0$; $f(\infty)=\infty>0$. Имеем 2 перехода (+,-) и (-,+), т.е.2 корня.

4. Проверяем выполнимость теорем I, II на каждом участке:

Сузим левую границу от $-\infty$ до 0 (т.к. $f(-\infty)>0$ и $f(0)>0$) и правую границу с $+\infty$ до 5 (т.к. $f(+\infty)>0$ и $f(5)>0$) – имеем отрезки [0;2.5] и [2.5;5].

Участок [0;2.5]: (обозначим $f2(x)=d^2f(x)/dx^2=2$)

$f(0)\ f(2.5)<0$ – нечётное число корней на отрезке [0;2.5];

$f1(0)\ f1(2.5)>0$ – функция монотонна на отрезке [0;2.5];

$f2(0)\ f2(2.5)>0$ – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [0;2.5] уравнение $x^2-5x+1 = 0$ имеет единственный корень.

Участок [2.5;5]:

$f(2.5)\ f(5)<0$ – нечётное число корней на отрезке [2.5;5];

$f1(2.5)\ f1(5)>0$ – функция монотонна на отрезке [2.5;5];

$f2(2.5)f2(5)>0$ – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [2.5;5] уравнение $x^2-5x+1 = 0$ имеет единственный корень.

Ответ: Корни отделены на отрезках [0;2.5] и [2.5;5].

Достоинства аналитического метода: этот метод позволяет выделить все действительные корни заданного уравнения.

Недостатки: можно применять для некоторых функций, у которых 1-я производная имеет простой вид, т.е. уравнение, полученное из первой производной, может быть решено аналитически.

Для ***численного*** отделения корней выполняется табуляция заданной функции в области изменения аргумента X с крупным шагом. Выделяются отрезки, на которых функция меняет свой знак и при необходимости выполняется табуляция выделенного отрезка с более мелким шагом (построение таблицы). По окончании процесса табуляции выделенные отре5зки необходимо проверить на наличие единственного корня по аналитическим теоремам единственности корня.

Достоинства: простота метода.

Недостатки:

1. можно пропустить корни при табуляции с большим шагом.
2. если функция сложная, то имеем много сложных вычислений.

Пример 2: Численно отделить корни для функции x^2-5x+0,5=0.

Решение. Проведём табуляцию функции:

x	$-\infty$	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100
y	+	+	+	+	+	+	-	+	+

Переход знака: [0;1] и[1;10] – необходимо повторное табулирование с более мелким шагом.

Участок [0;1]: (обозначим f1(x)=df(x)/dx= 2x-5 и f2(x)=$d^2f(x)/dx^2$=2)

f(0) f(1)<0 – нечётное число корней на отрезке [0;1];

f1(0) f1(1)>0 – функция монотонна на отрезке [0;1];

f2(0) f2(1)>0 – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [0;1] уравнение x^2-5x+0.5 = 0 имеет единственный корень.

Участок [1;10]:

f(1) f(10)<0 – нечётное число корней на отрезке [1;10];

f1(1) f1(10)<0 – функция немонотонна на отрезке [1;10];

необходимо сузить этот отрезок.

x	1	2	3	5	10
y	–	–	–	+	+

f1(3) f1(5)>0 – функция монотонна на отрезке [1;10];

f2(3)f2(5)>0 – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [3;5] уравнение x^2-5x+0.5 = 0 имеет единственный корень.

Ответ: Корни отделены на отрезках [0;1], [3;5]

1.3. Основные понятия итерационных методов уточнения корней

Все численные методы уточнения корней итерационные (пошаговые).

Итерацией называется каждый отдельный вычисленный шаг, в результате которого получается значение корня. Сам процесс таких вычислений называется *итерационным процессом*.

Различают сходящийся итерационный процесс, когда в результате последовательности шагов мы приближаемся к одному значению и расходящийся итерационный процесс, когда последующие значения x сильно отличаются друг от друга.

Кроме того, итерационный процесс бывает монотонным, если приближение или удаление осуществляется в одну сторону и колебательным, если приближение или удаление происходит с разных сторон от истинной величины корня.

Для выполнения любого итерационного процесса выводится итерационная формула, которая позволяет вычислить следующее значение переменной x через какое-либо известное значение этой величины x, т.е.:

$$x_{i+1}=\varphi(x_i) \qquad (4)$$

где i- номер итерации; φ- итерационная формула.

Итерационный процесс происходит до тех пор, пока не достигается заданная точность, т.е. пока не выполнятся условия:

$$|x_{i+1}-x_i|\le\varepsilon_x \qquad (5)$$

$$|f(x_{i+1})|\le\varepsilon_y \qquad (6)$$

где x_{i+1} и x_i два соседних приближения к корню;

$f(x_{i+1})$ – значение функции в точке, которую считают корнем;

ε_x, ε_y - заданная точность по аргументу x и по функции y.

Часто точность задается одинаковая $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon$

Алгоритм уточнения корня на выделенном отрезке сводится к следующему:

1. Проверить условие применимости итерационных методов (I, II теоремы)
2. Выбрать начальные приближения к корню

3. Выполнить итерационный процесс, проверяя на каждой итерации условия его окончания.
4. Записать результат вычисления по правилам записи приближенных чисел.

В зависимости от вывода итерационной формулы φ(x) различается несколько методов уточнения корней: метод простых итераций, метод половинного деления, метод касательных, метод хорд, метод секущих и т.д.

1.4. Метод простых итераций

По методу простых итераций итерационная формула получается из заданного уравнения, если выразить из него одно из наименований аргумента x, т.е. имеем f(x)=0 выражаем x= φ(x) - итерационная формула (4).

Пример 3: Найти возможные итерационные формулы метода простых итераций для решения уравнения $x^3=\ln(x)$.

Решение. Для функции $\underline{x}^3=\ln(x)$ можно x выразить по разному:

a) $x=\sqrt[3]{\ln(x)}$

b) $\underline{x}^2\cdot x=\ln(x)$ тогда $x^2=\ln(x)/x$, следовательно, $x=\sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}$

c) $\underline{x}\ x^2=\ln(x)$, следовательно, $x=\ln(x)/x^2$

d) $\ln(\underline{x})=x^3$, тогда $\exp(\ln(x))=\exp(x^3)$, следовательно, $x=\exp(x^3)$

Но не всякая итерационная формула дает сходимость.

Чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы модуль производной от итерационной функции в любой точке выделенного отрезка уточнения корня был меньше единицы:

$$0<|d\varphi(x)/dx|\le 1 \qquad (7)$$

или

$$0<|\varphi'(a)|\le 1 \qquad 0<|\varphi'(b)|\le 1 \qquad (8)$$

Пример 4: Графически отделить корни для функции $x^3=\ln(x)+1.7$ и найти итерационную формулу на одном из отрезков, которая даёт сходимость.

Решение. Выделим функции $f_1(x)=x^3$ и $f_2(x)= \ln(x)+1.7$.

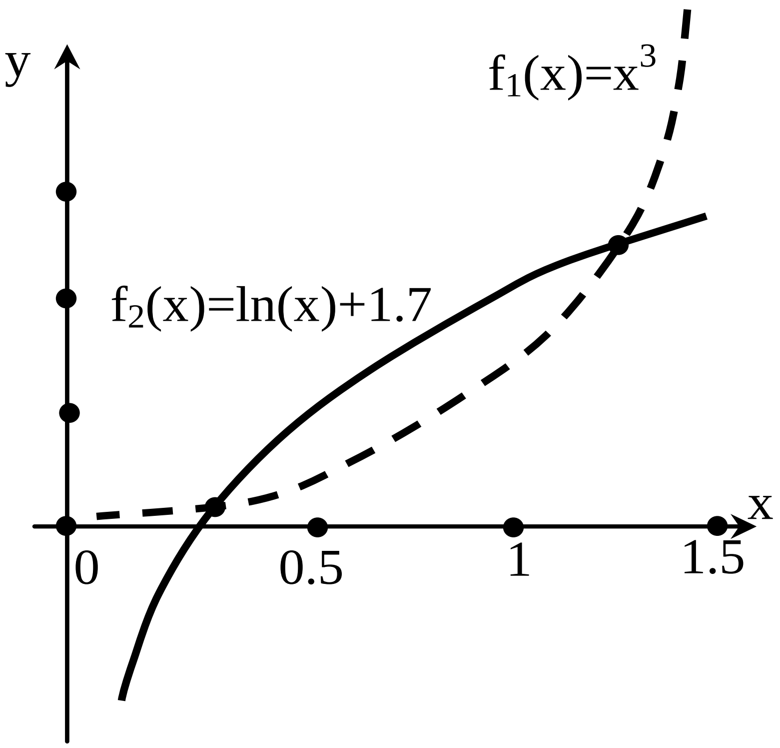


Рис. 1.4. Графическое отделение корней в итерационном методе.

1. Графически отделяем корни (рис.1.4) – отрезки [0;0.5] [1;1.5].
2. Уравнение f(x)=0, где функция: $f(x)=x^3-\ln(x)-1.7$
Проверим выполнимость двух теорем для отрезка [1;1.5]:
а) $f(1)=1^3-\ln(1)-1.7= -0.7<0$
$f(1.5)=1.5^3-\ln(1.5)-1.7=1.27>0$,
т.е. f(1) f(1.5) <0
по условию (1) корень на отрезке [1;1.5]существует.
б) $f1(x)=df(x)/dx=3x^2-1/x$;
$f1(1)=3-1=2>0$
$f1(1.5)=3(1.5)^2-1/1.5= 6.083>0$,
т.е. f1(1) f1(1.5) >0
по условию (2) функция монотонна.
в) $f2(x)=d^2f(x)/dx^2=6x+1/x^2$;

$f2(1)=6+1=7>0$ $f2(1.5)=6(1.5)+1/1.5^2=9.444>0$;
т.е. f2(1) f2(1.5) >0, по условию (3) точек перегиба нет.

Вывод: На отрезке [1;1.5] существует единственный корень уравнения $x^3=\ln(x)+1.7$.

3. Выведем итерационные формулы и проверим их на сходимость. Из исходной функции f(x) = x^3-ln(x)-1.7 = 0 получим различные итерационные формулы:

а) Первая итерационная формула $\phi_1(x) = \frac{\ln(x)+1.7}{x^2}$;

Производная от неё: $\phi_1'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(\ln x + 1.7)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x - 3.4x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x - 2.4x}{x^3}$

Проверка сходимости по (8): $\phi_1'(1) = \frac{-2.4}{1} = -2.4; |\phi_2'(x)| > 1$ сходимости нет

Формула не дает сходимости итерационного процесса (7).

б) Вторая итерационная формула $\phi_2(x) = \sqrt[3]{\ln(x)+1.7}$

Производная от неё: $\phi_2'(x) = \frac{1}{3}(\ln(x)+1.7)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(\ln(x)+1.7)^2}}$

Проверка сходимости по (8):

$\phi_2'(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1.7^2}} = 0.475 < 1$ $\qquad$ $\phi_2'(1.5) = \frac{1}{4.5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(\ln(1.5)+1.7)^2}} = 0.135 < 1$

Итерационный процесс – сходится по условию (8).

Ответ. Итерационная формула $\phi_2(x) = \sqrt[3]{\ln(x)+1.7}$ даёт сходимость итерационного процесса на отрезке [1;1.5].

Чем дальше модуль производной φ'(x) от 1 и чем ближе к 0, тем лучше сходимость итерационного процесса, т.е. тем меньше шагов потребуется для вычисления корня.

Считается, что если: |φ'(x)|<0.3-очень хорошая сходимость; |φ'(x)|<0.5 - хорошая сходимость; |φ'(x)|<0.7 – удовлетворительная сходимость; |φ'(x)|<0,9-плохая сходимость.

Может оказаться, что не существует прямых итерационных формул, которые бы давали сходящийся итерационный процесс.

Тогда выводят **универсальную формулу** исходя из условия сходимости итерационного процесса, определяемого итерационной формулой. Для этого исходное уравнение f(x)=0 умножается на корректирующий коэффициент и к обеим частям этого уравнения добавляется величина x, т.е. x+K f(x)=x=φ(x) или:

$$\phi(x) = x + Kf(x) \qquad (9)$$

Взяв производную от (9) имеем:

$$\phi'(x) = 1 + Kf'(x) \qquad (10)$$

Из (7) для идеальной сходимости процесса $\phi'(x)$=0 или:

$$|1 + Kf'(x)| = 0 \qquad (11)$$

Откуда $K = \dfrac{-1}{\max|f'(x)| \cdot sign[f'(x)]}$

Пример 5: Для функции x^3-ln(x)-1,7=0 (пример 4) на отрезке [1;1.5] найти выражение для универсальной итерационной формулы.

Решение. Универсальная формула: x=x+K(x^3-ln(x)-1.7)

f1(1)=2; f1(1.5)=6.083; max|f1(x)|=6.083 на отрезке [1;1.5]

Знак первой производной sign(f1(x))=+1 на отрезке [1;1.5].

Таким образом: $K = -\frac{1}{6}$

Ответ: Универсальная формула $x = x - \frac{1}{6}(x^3 - \ln(x) - 1.7)$;

В зависимости от вида функции φ(x) получают различные итерационные процессы: сходящиеся или расходящиеся. Графическая интерпретация метода простых итераций заключается в построении биссектрисы y_1=x и y_2=φ(x) (Рис. 1.5, 1.6, 1.7, 1.8):

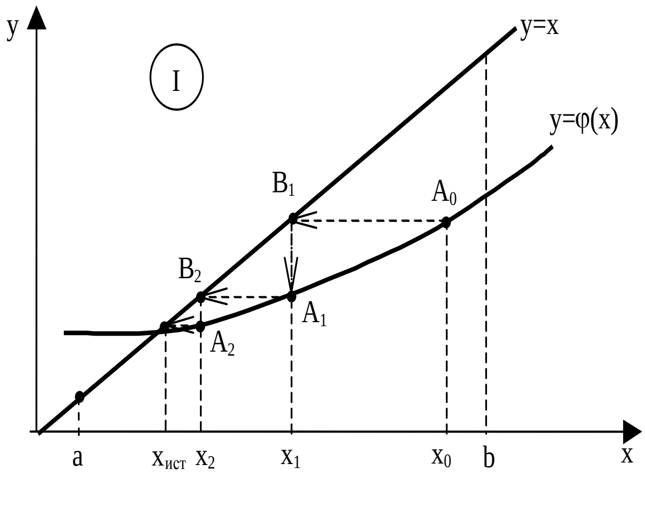


Рис. 1.5. I-корректный случай- монотонно-сходящийся итерационный процесс.

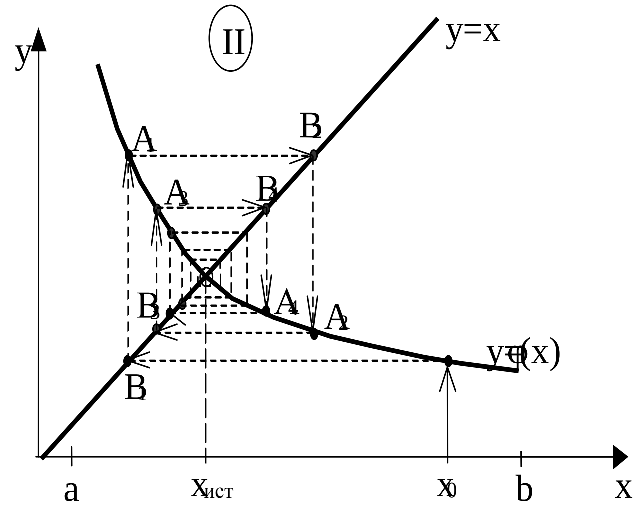
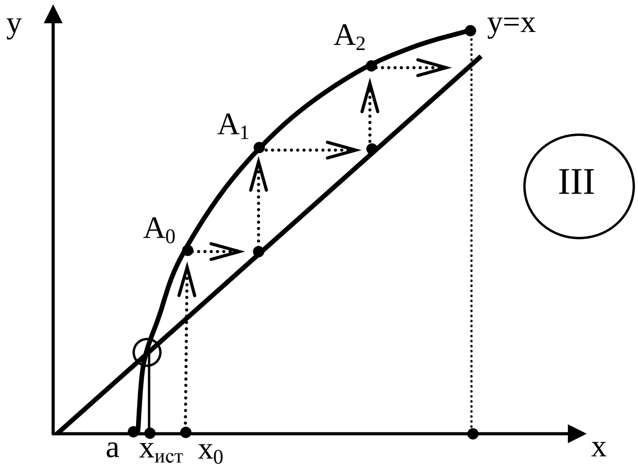


Рис. 1.6. II-корректный случай – колебательный сходящийся итерационный процесс.



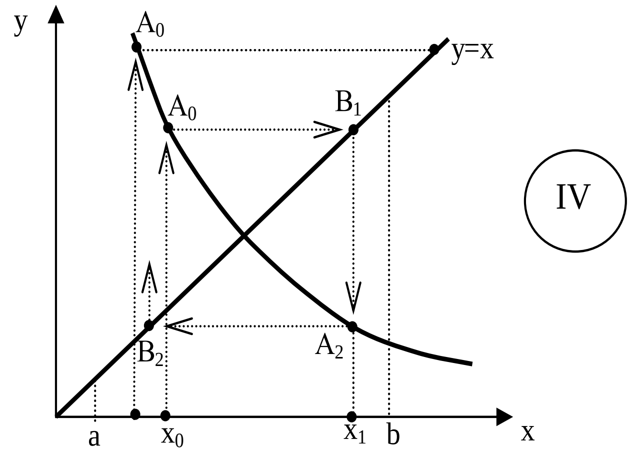


Рис. 1. 7. III- некорректный случай (уходим от корня $x_{ист)}$ |φ'(x)|>1 т.е. наклон больше чем у биссектрисы.

Рис. 1. 8. IV - Некорректный случай (уходим от корня $x_{ист}$) |φ'(x)|>1 т.е. отрицательный наклон больше.

Итерационный процесс выполняется по формуле (9). За начальное приближение x_0 принимают любую точку отрезка отделения корня [a;b]. Обычно выбирают или середину отрезка x_0=(a+b)/2, либо тот конец, на котором сходимость выше:

$$x_0 = \begin{cases} a, если |\phi'(a)| < |\phi'(b)|; \\ b, если |\phi'(b)| < |\phi'(a)|; \end{cases} \qquad (14)$$

Итерационные расчеты заканчиваются когда будут выполнены оба условия окончания расчёта (5) и (6).

Достоинство метода простых итераций: простота итерационной формулы.

Недостаток метода простых итераций: для сложных функций сложно добиться сходимости итерационного процесса.

1.5. Метод касательных (Ньютона)

Сущность метода состоит в том, что на отрезке [a;b] исходное уравнение f(x) заменяется касательной к этой функции, проведенной на одном из концов отрезка. За приближение к корню принимается точка пересечения касательной с осью x (рис. 1.9, 1.10.):

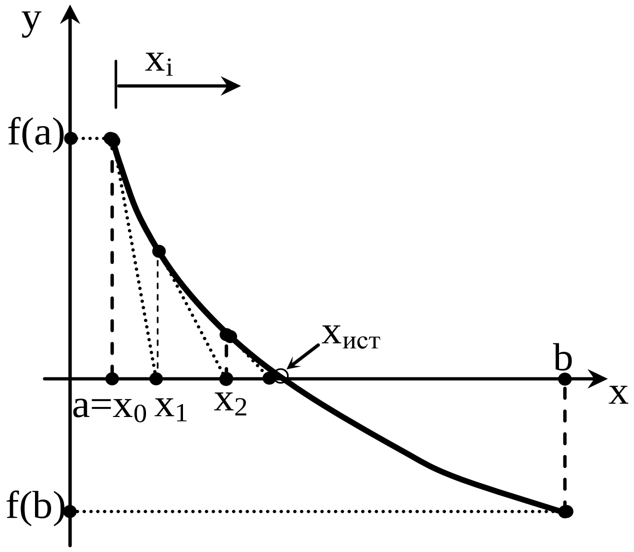


Рис. 1.9. Метод касательных для монотонно убывающей функции.

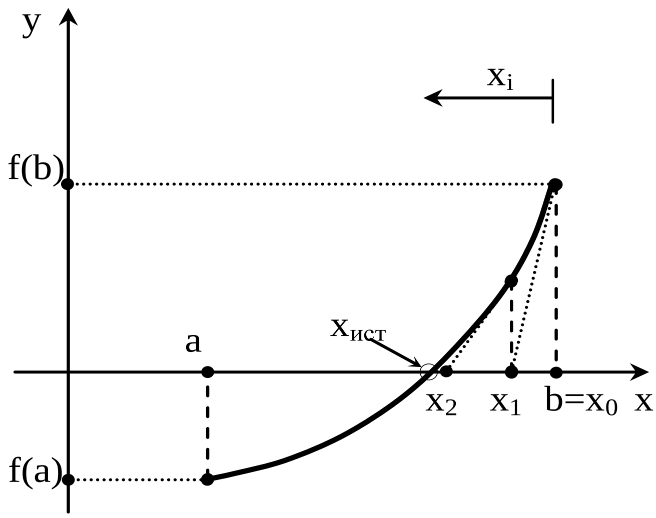


Рис. 1.10. Метод касательных для монотонно возрастающей функции.

Известно, что тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс в точке x_i равен производной в этой точке : $tg\alpha_i = f'(x_i)$.

Тангенс угла в треугольнике есть отношение противолежащего катета к прилежащему катету, т.е. из графика имеем: $tg\alpha_i = \frac{-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$. Приравнивая, получим: $-\frac{f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f'(x_i)$.

Откуда, выражая x_{i+1}, получим итерационную формулу метода касательных:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \qquad (15)$$

Важно правильно выбрать начальное приближение, которое определяется из условий сходимости итерационной формулы (15). Чтобы формула давала сходящийся процесс необходимо, чтобы:

$$f(x) \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \qquad (16)$$

Отсюда начальное приближение x_0 находят по формуле:

$$x_0 = \begin{cases} a, если \ f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, если \ f(b) f''(b) > 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Условие (17) выполняется либо в точке a, либо в точке b.

Условия окончания расчёта (5) и (6).

Достоинство метода касательных: хорошая сходимость итерационного процесса к корню.

Недостаток: этот метод нельзя использовать в том случае, если на границах отрезка производные к функции f(x) асимптотически приближаются к прямым параллельным осям координат, т.е. производные близки к бесконечности или 0.

1.6. Метод хорд

Сущность метода заключается в том, что на отрезке [a,b] заданная функция f(x) заменяется хордой, которая стягивает значения функции на концах отрезка существования корня (рис.1.11, 1.12).

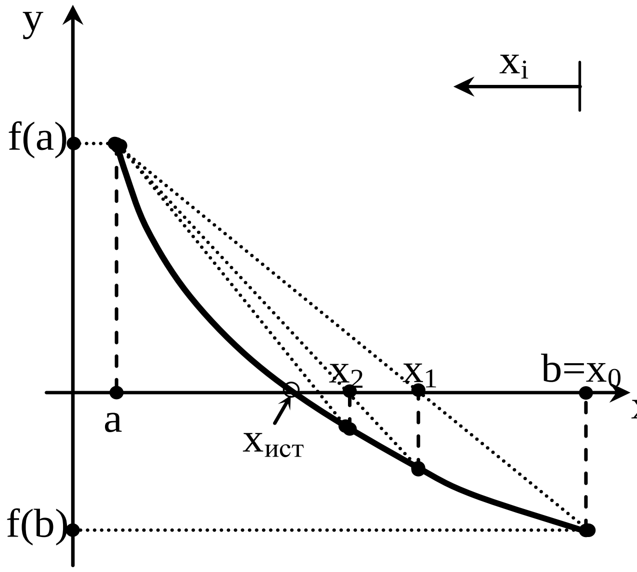


Рис. 1.11. Метод хорд для монотонно убывающей функции.

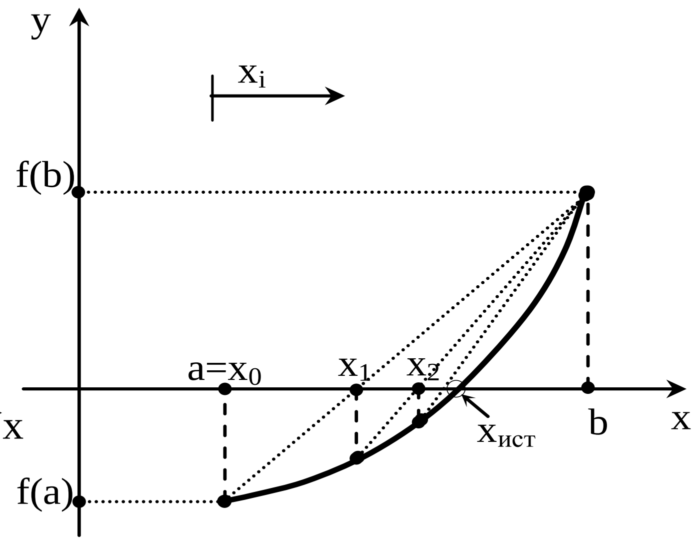


Рис. 1.12. Метод хорд для монотонно возрастающей функции.

Точку пересечения хорды и оси абсцисс принимаем за следующее приближение к корню. Один конец отрезка неподвижен, второй участвует в сходящемся итерационном процессе. Обозначим неподвижную точку «c». Из геометрии известно, что уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами ($x_1;y_1$) и ($x_2;y_2$) имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (18)$$

Рассмотрим хорду, проходящую через точки с координатами [x_i;f(x_i)] и [c;f(c)]. Тогда из (18) имеем:

$$\frac{y-f(x_i)}{f(c)-f(x_i)}=\frac{x-x_i}{c-x_i} \qquad (18а)$$

В точке пересечения линии с осью абсцисс y=0, тогда из (18а) имеем:

$$\frac{-f(x_i)}{f(c)-f(x_i)}=\frac{x_{i+1}-x}{c-x_i} \qquad (18б)$$

Выражая из (18б) x_{i+1} имеем уравнение метода хорд:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\cdot(c-x_i)}{f(c)-f(x_i)} \qquad (19)$$

За начальное приближение (подвижную точку) для метода хорд принимаем такую точку x_0, для которой:

$$x_0 = \begin{cases} a, если\ \ f(a)\cdot f''(a)<0 \\ b, если\ \ f(b)\cdot f''(b)<0 \end{cases} \qquad (20)$$

Условия окончания расчёта (5) и (6).

Достоинства: высокая скорость сходимости к корню.

Недостатки: четкое выполнение правил единственного корня (1) - (3).

1.7. Метод половинного деления

Сущность метода состоит в том, что на отрезке [a,b] за следующее приближение к корню принимается середина выделенного отрезка c=(a+b)/2.

Если середина не является корнем, то она принимается за точку, которая делит отрезок на 2 равные части - корень лежит на одной из этих частей и середина становится одной из границ нового выделенного отрезка.

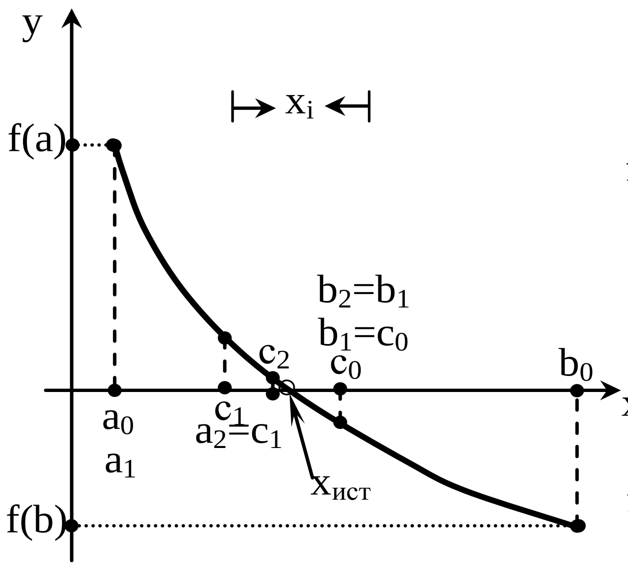


Рис. 1.13. Метод половинного деления для монотонно убывающей функции.

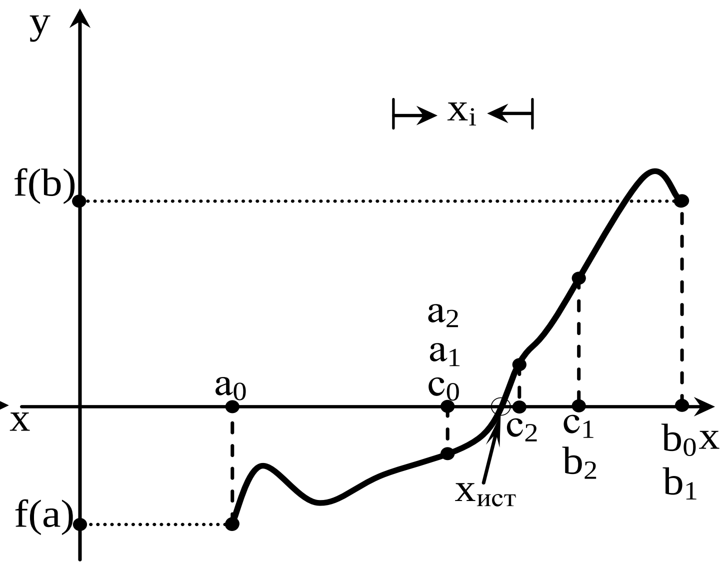


Рис. 1.14. Метод половинного деления для немонотонной функции, имеющей точки перегиба.

На 0-м шаге деление пополам исходного отрезка $[a_0;b_0]$ (рис. 1.13) приводит к появлению двух половинок – отрезков $[a_0;(a_0+b_0)/2]$ и $[(a_0+b_0)/2;b_0]$. Корень есть на том из отрезков, на котором функция на концах отрезка имеет разные знаки. Для рис. 13. имеем $f(a_0)>0$ и $f(c_0=(a_0+b_0)/2)<0$ – разные знаки; и $f(c_0=(a_0+b_0)/2)<0$ и $f(b_0)<0$ – одинаковые знаки. Вывод – корень есть на отрезке $[a_0;(a_0+b_0)/2]$.

На следующем 1-м шаге (рис. 1.13) рассматривается отрезок $[a_1=a_0;b_1=(a_0+b_0)/2]$, на котором есть корень. Отрезок $[a_1;b_1]$ делится пополам – имеем отрезки $[a_1;(a_1+b_1)/2]$ и $[(a_1+b_1)/2;b_1]$. Корень есть на том из отрезков, на котором функция на концах отрезка имеет разные знаки. Для рис. 13. имеем $f(a_1)>0$ и $f(c_1=(a_1+b_1)/2)>0$ – одинаковые знаки; и $f(c_1=(a_1+b_1)/2)>0$ и $f(b_1)<0$ – разные знаки. Вывод – корень есть на отрезке $[(a_1+b_1)/2;b_1]$.

На следующем 2-м шаге (рис. 1.13) рассматривается отрезок $[a_2=(a_1+b_1)/2;b_2=b_1]$, на котором есть корень. И так далее, до тех пор пока:

$$\left|\frac{a_i-b_i}{2}\right| \le \varepsilon_x \text{ и } \left|f(\frac{a_i+b_i}{2})\right| \le \varepsilon_y$$

За решение принимается величина: $x=\dfrac{a_i+b_i}{2} \pm \left|\dfrac{a_i-b_i}{2}\right|$

Итак, сделаем два вывода к методу половинного деления:

- корня на отрезке нет, если функции на концах отрезка одного знака.
- если корня на отрезке нет, то один из его краев становится подвижным.

Исходя из этого, имеем формулы для метода половинного деления:

$$a_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{a_i+b_i}{2}; если\ f(a_i)\cdot f(\frac{a_i+b_i}{2})>0\\ a_i; если\ f(a_i)\cdot f(\frac{a_i+b_i}{2})<0\end{cases} \qquad b_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{a_i+b_i}{2}; если\ f(b_i)\cdot f(\frac{a_i+b_i}{2})>0\\ b_i; если\ f(b_i)\cdot f(\frac{a_i+b_i}{2})<0\end{cases} \quad (21)$$

Для этого метода начальное приближение задавать не надо.

Достоинства: единственный метод, который не требует выполнения I-ой теоремы (функция может быть немонотонной на [a;b] (рис.1.14) и иметь точки перегиба).

Недостатки: достаточно низкая скорость сходимости, зная ширину отрезка можно предсказать количество шагов, которое надо выполнить для вычисления корня с заданной точностью (оно кратно $2^{(b-a)}$).

1.8. МОДИФИКАЦИИ МЕТОДОВ

Основное применение находят методы хорд, касательных, простых итераций, половинного деления или их модификации, которые вводятся для тех случаев, когда точность высока, а выражение для исходной функции достаточно сложно. Наибольшее распространение метода касательных получили следующие методы: модификация Ньютона – Эйлера, метод секущих, комбинированный метод хорд и касательных, метод Векстейна.

1.8.1. Модификация Ньютона-Эйлера

Модификация Ньютона-Эйлера – модификация метода касательных и используется, когда выражение для производной df(x)/dx в несколько раз сложнее выражения исходной функции f(x).

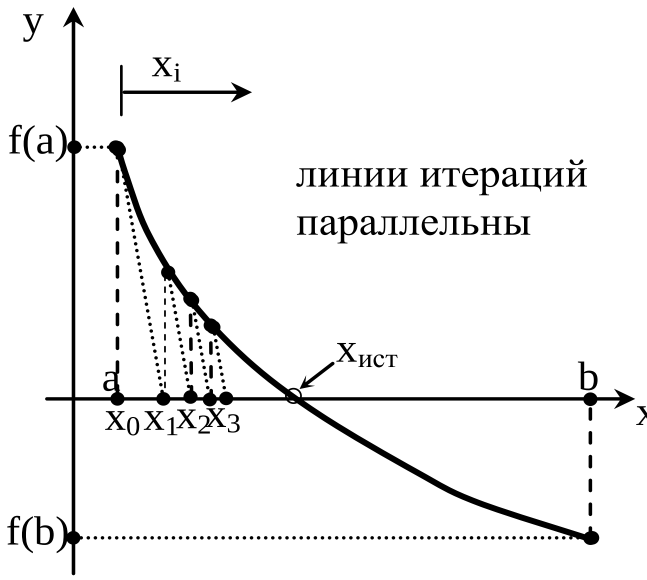


Рис. 1.15. Модификация Ньютона-Эйлера для убывающей функции.

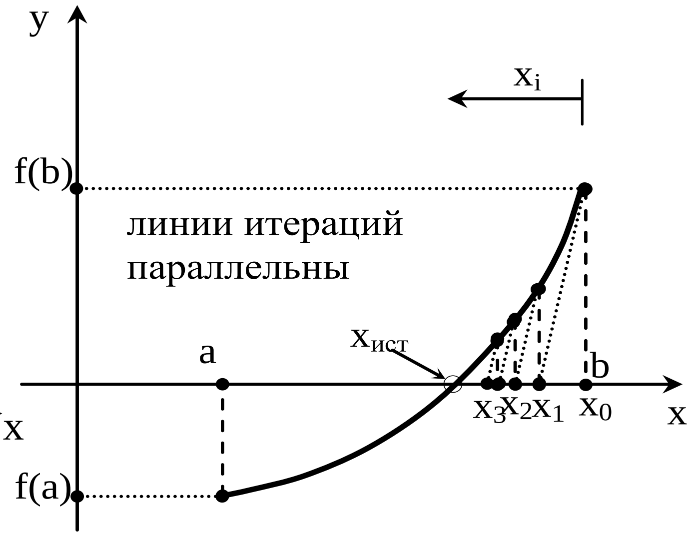


Рис. 1.16. Модификация Ньютона-Эйлера для возрастающей функции.

В этом модифицированном методе производятся вычисления производной только один раз в начальной точке $df(x_0)/dx$. Графически (рис.1.15, 1.16) это обозначает, что проводится лишь одна касательная на 0-й итерации, а остальные линии итераций графически проводятся параллельно этой касательной.

Итерационная формула метода Ньютона-Эйлера примет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)} \qquad (22)$$

Метод обладает основными достоинствами метода касательных, но сходимость к корню ниже, т.к. неточно вычисляем производную.

1.8.2. Метод секущих

Метод секущих используется когда, когда выражение для производной df(x)/dx в методе касательных очень сложное. Это выражение заменяется по определению производной своим приближением:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad (23)$$

Тогда имеем формулу метода касательных для метода секущих в виде:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})} \qquad (24)$$

Уравнение метода секущих похоже на уравнение метода хорд, но здесь оба конца подвижны.

Для метода секущих нужно задать две начальные точки: x_0 и x_1. Начальная точка x_0 выбирается по правилам метода касательных (17). Для нахождения другой начальной точки вводят точку с индексом x_{-1} - другой конец отрезка [a;b]. Тогда, вторую начальную точку x_1 находят, как точку пересечения стягивающей хорды $f(x_0)$-$f(x_{-1})$ с осью абсцисс (рис. 1.18, 1.19).

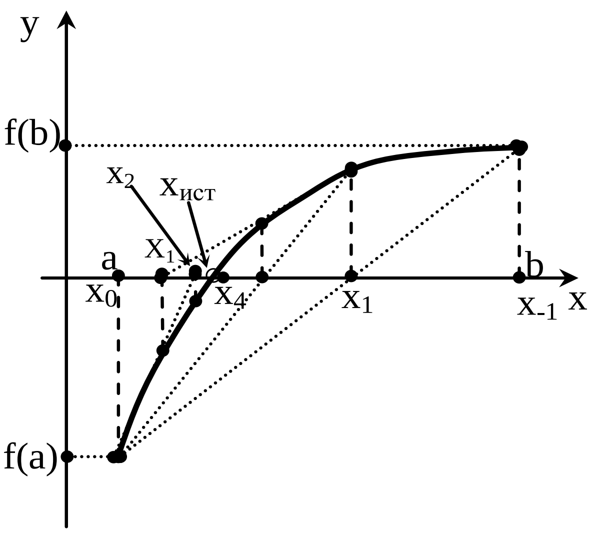


Рис. 1.17. Метод секущих для монотонно возрастающей функции.

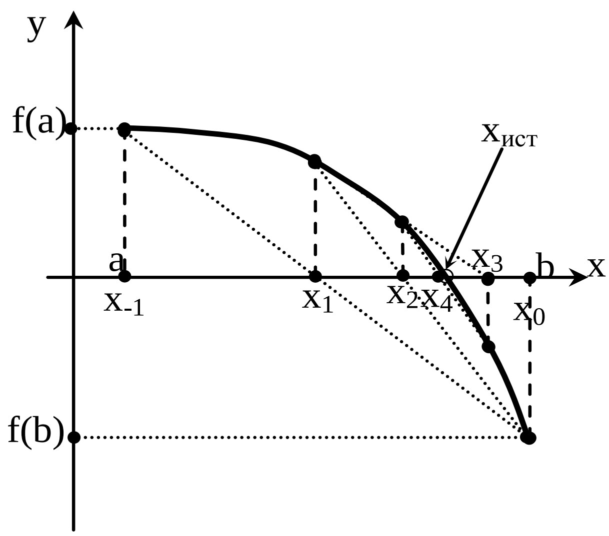


Рис. 1.18. Метод секущих для монотонно убывающей функции.

Имея две начальные точки x_0 и x_1, проводят секущую $f(x_0)$-$f(x_1)$, находя точку пересечения с осью абсцисс x_2. Затем проводят следующую секущую $f(x_1)$-$f(x_2)$, находя точку пересечения с осью абсцисс x_3. Затем проводят следующую секущую $f(x_2)$-$f(x_3)$, находя точку пересечения с осью абсцисс x_4. Процесс проведения секущих продолжают до достижения требуемой точности по ε уравнения (2) и (3) (рис. 1.17, 1.18).

В отличие от метода хорд и касательных, когда приближение ведется с одной стороны, итерационный процесс ведется с двух сторон, и он колебательный, поэтому приближения к корню по скорости снижается.

1.8.3. Комбинированный метод хорд и касательных.

По этому методу приближение к корню ведется с двух сторон отрезка. По уравнению (17) выбирается начальная точки для метода касательных, а по уравнению (20) – для метода хорд. С одного конца отрезка следуют по методу касательных (15), с другого - по методу хорд (19). Это позволяет сузить отрезок и увеличить скорость сходимости (рис. 19, 20).

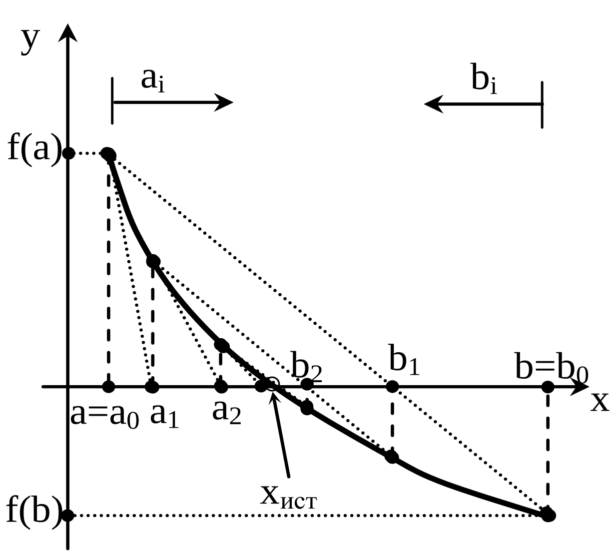


Рис. 1.19. Комбинированный метод хорд и касательных для монотонно убывающей функции.

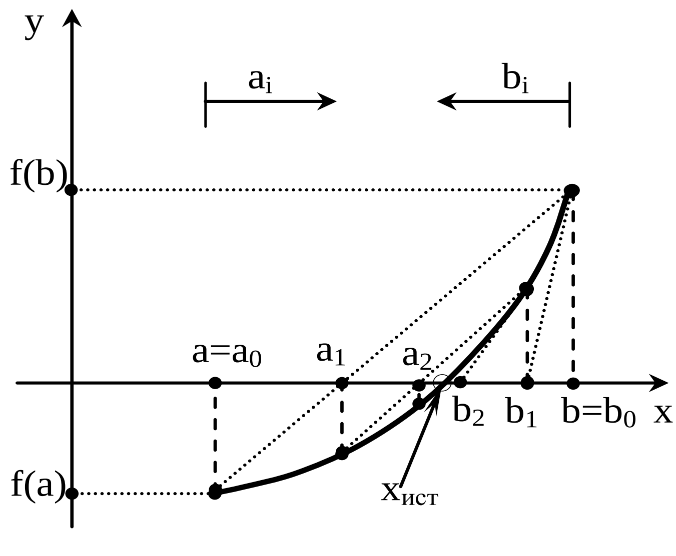


Рис. 1.20. Комбинированный метод хорд и касательных для монотонно возрастающей функции.

Формулы комбинированного метода хорд и касательных для случая, когда левая граница изменяется по методу касательных, а правая по методу хорд (рис. 19) имеют вид:

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i - \dfrac{f(a_i)}{f'(a_i)} \\ b_{i+1} = b_i - \dfrac{f(b_i)(a_i - b_i)}{f(a_i) - f(b_i)} \end{cases} \qquad (25)$$

Формулы комбинированного метода хорд и касательных для случая, когда левая граница изменяется по методу хорд, а правая по методу касательных (рис. 20) имеют вид:

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i - \dfrac{f(a_i)(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \\ b_{i+1} = b_i - \dfrac{f(b_i)}{f'(b_i)} \end{cases} \qquad (26)$$

И так далее, до тех пор пока:

$$\left|\frac{a_i - b_i}{2}\right| \le \varepsilon_x \text{ и } \left|f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)\right| \le \varepsilon_y$$

За решение принимается величина: $x = \dfrac{a_i + b_i}{2} \pm \left|\dfrac{a_i - b_i}{2}\right|$

Сходимость метода выше, чем у метода хорд и касательных взятых по отдельности.

1.8.4. Метод Векстейна

Метод Векстейна - комбинированный метод хорд и итераций, причем хорда используется для замены φ(x), а не исходной функции f(x).

Графическая интерпретация метода представлена на рис. 1.21.

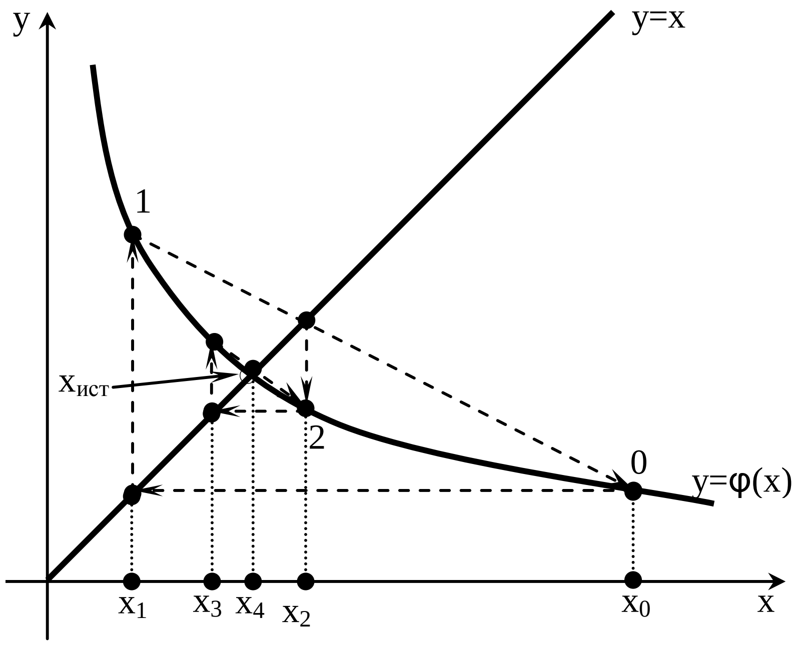


Рис. 1.21. Метод Векстейна.

Имея начальное приближение точку x_0 Итерация $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow$хорда Итерация $x_2 \rightarrow$ $x_3 \rightarrow$хорда

Точка пересечения хорды с биссектрисой y_1=к даёт следующее приближение к корню x_{i+1} т.е. заменяем x и y в уравнении прямой (биссектриса$\Rightarrow y = x_{i+1} u x = x_{i+1}$)

Выведем уравнение метода хорд. Уравнение прямой (18), проходящей через две точки x_{i-1} и x_i (где i=1,2…n (рис. 1.21.)) имеет вид:

$$\frac{y-\phi(x_i)}{\phi(x_{i-1})-\phi(x_i)} = \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} \qquad (27)$$

Искомая точка x_{i+1} лежит на биссектрисе y=x. Полагая $y=x=x_{i+1}$ имеем:

$$\frac{x_{i+1}-\phi(x_i)}{\phi(x_{i-1})-\phi(x_i)} = \frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i-1}-x_i} \qquad (28)$$

Выразим из (28) x_{i+1}, получим формулу метода Векстейна (где $x_i=\varphi(x_{i-1})$):

$$x_{i+1} = \frac{\phi(x_i)\cdot x_{i-1}-x_i^2}{x_{i-1}-2x_i+\phi(x_i)} \qquad (29)$$

Часто за начальное приближение в методе Векстейна $x_0=(a+b)/2$.

Итерации продолжают до достижения требуемой точности по ε уравнения (2) и (3).

Достоинства: если итерационная формула обладает плохой сходимостью или имеет немного расходящийся процесс (т.е. $|\phi'(x)| \approx 1$), то метод Векстейна даёт быстро сходящийся итерационный процесс.

Недостаток: нельзя использовать если $|\phi'(x)| >> 1$.

1.8.5. Метод золотого сечения

Метод золотого сечения - модификация метода половинного деления. Сущность метода заключается в то, что отрезок уточнения корня [a;b] делится не пополам, а на три равные части $[a_i;x_i]$, $[x_i;z_i]$ и $[z_i;b_i]$. При этом возможны три случая расположения корня (рис. 1.22).

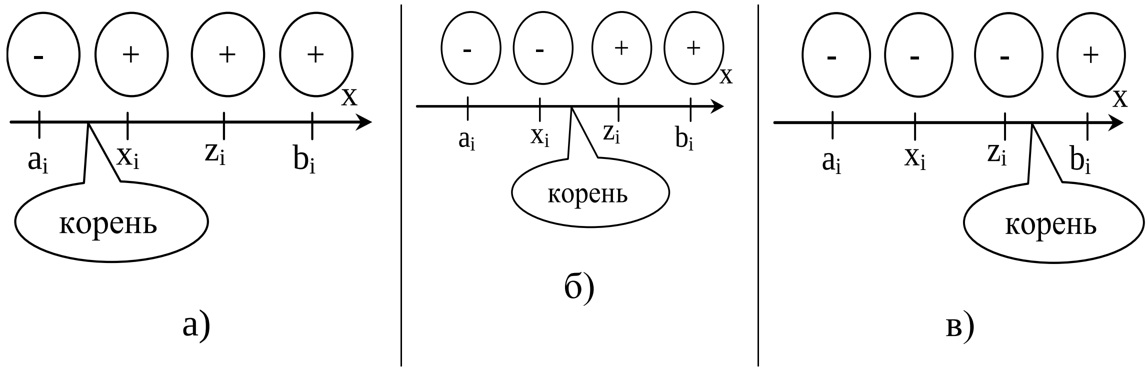


Рис. 1.22. К методу золотого сечения.

По методу золотого сечения имеем два приближения к корню:

$$x_{i+1} = \frac{2a_i + b_i}{3} \qquad z_{i+1} = \frac{a_i + 2b_i}{3} \qquad (30)$$

Если корень находится на одном из трёх выделенных золотым сечением отрезке, то на следующей итерации рассматривают уже этот отрезок.

Для рис. 22а имеем: $a_{i+1} = a_i \quad b_{i+1} = x_i \quad т.к.\ f(a_i) \cdot f(x_i) < 0$

Для рис. 22б имеем: $a_{i+1} = x_i \quad b_{i+1} = z_i \quad т.к.\ f(x_i) \cdot f(z_i) < 0$

Для рис. 22в имеем: $a_{i+1} = z_i \quad b_{i+1} = b_i \quad т.к.\ f(z_i) \cdot f(b_i) < 0$

Таким образом, формулы метода золотого сечения:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i \ \ если\ \ f(a_i) \cdot f\left(\dfrac{2a_i + b_i}{3}\right) < 0 \\ \dfrac{2a_i + b_i}{3}\ \ если\ \ f\left(\dfrac{2a_i + b_i}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{a_i + 2b_i}{3}\right) < 0 \\ \dfrac{a_i + 2b_i}{3}\ \ если\ \ f\left(\dfrac{a_i + 2b_i}{3}\right) \cdot f(b_i) < 0 \end{cases} \qquad (31)$$

$$b_{i+1}=\begin{cases}\frac{2a_i+b_i}{3}\ \text{если}\ f(a_i)\cdot f\left(\frac{2a_i+b_i}{3}\right)<0\\ \frac{a_i+2b_i}{3}\ \text{если}\ f\left(\frac{2a_i+b_i}{3}\right)\cdot f\left(\frac{a_i+2b_i}{3}\right)<0\\ b_i\ \text{если}\ f\left(\frac{a_i+2b_i}{3}\right)\cdot f(b_i)<0\end{cases} \qquad (32)$$

И так далее, до тех пор пока:

$$\left|\frac{a_i-b_i}{3}\right|\le\varepsilon_x \ \text{и}\ \left|f(\frac{a_i+b_i}{3})\right|\le\varepsilon_y$$

За решение принимается величина: $x=\frac{a_i+b_i}{2}\pm\left|\frac{a_i-b_i}{3}\right|$

Графическая интерпретация метода представлена на рис. 1.23.

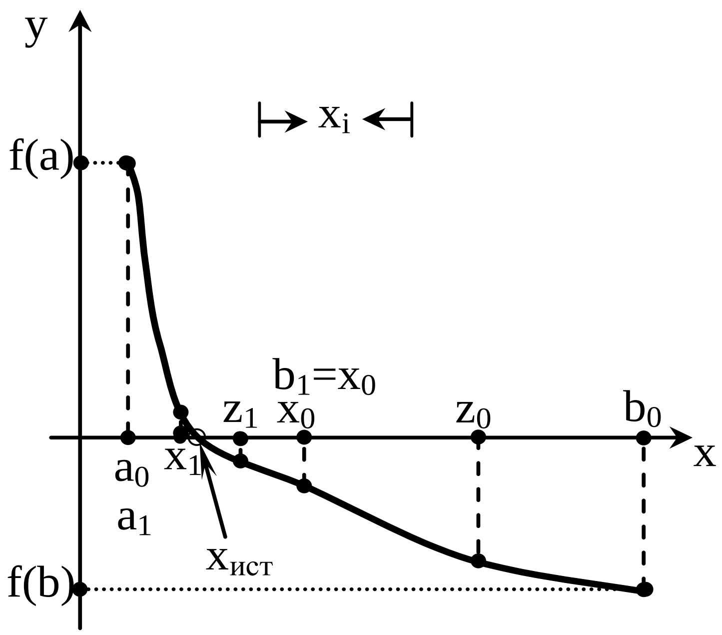


Рис. 1.23. Метод золотого сечения.

Достоинство: позволяет увеличить сходимость к корню по сравнению с методом половинного деления.

Недостаток: усложнение итерационной формулы.

2. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ EXCEL

Численное решение нелинейного уравнения с одним неизвестным в той главе рассмотрим с использованием табличного процессора Excel. Этапы решения нелинейного уравнения те же: 1. Отделение корней одним из методов; 2. Уточнение корней нелинейного уравнения одним из методов.

Выборочно проиллюстрируем особенности решения несколькими методами в среде Excel на примере решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$.

Для метода хорд (рис. 2.1) численно отделяем корни по перемене знака функции и выделяем отрезок уточнения корня. Затем проверяем условие подвижности конца для метода хорд (17). Проверяем функцию на монотонность - проверяем постоянство знака первой производной (вычисление производной заменено разностным уравнением $[f(x_{i+1})-f(x_i)]/[x_{i+1}-x_i]$).

Проверяем функцию на отсутствие точек перегиба – проверяем постоянство знака второй производной (вычисление второй производной заменено разностным уравнением $[f''(x_{i+1})-f''(x_i)]/[x_{i+1}-x_i]$).

Принимаем начальное приближение для итерационного процесса в соответствии с условием (20) – произведение значения функции в подвижной точке на значение второй производной в подвижной точке должно быть отрицательно. Таким образом, выбрали начальную точку для метода хорд.

Табуляция	Значение функции	Производная (разностное уравнение)	Вторая производная (разностное уравнение)	Итерация	Корень (метод хорд)	Значение функции
0	1,2			0	0,7	-0,003414696
0,1	1,004837	-1,95162582		1	0,697757	-5,63499E-05
0,2	0,818731	-1,86106665	0,905591701	2	0,69772	-9,29892E-07
0,3	0,640818	-1,779125324	0,819413256	3	0,697719	-1,53452E-08
0,4	0,47032	-1,704981746	0,741435775			
0,5	0,306531	-1,637893863	0,670878832			
0,6	0,148812	-1,577190236	0,60703627			
0,7	-0,003415	-1,522263323	0,549269132	подвижный		
0,8	-0,150671	-1,472563397	0,496999263			
0,9	-0,29343	-1,427593044	0,44970353			
1	-0,432121	-1,386902186	0,406908581			

Рис. 2.1. Метод хорд в Excel.

Последующий итерационный процесс выполняется по формуле (19) метода хорд (рис. 2.1.). Выводим столько итераций и значений функций, сколько необходимо для достижения требуемой точности (принятая точность ε=0.0001) в соответствии с условиями (5), (6).

Рассмотрим другой метод решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$ в среде Excel – метод простых итераций (рис. 2.2.). Здесь добавляется условие проверки итерационной формулы на сходимость по формулам (7) и (8). На выделенном отрезке уточнения корня итерационный процесс сходится (рис. 2.2).

Табуляция	Значение функции	Итерационная формула	Производная от итерационной формулы (разностное уравнение)	Вывод о сходимости итерационного процесса	Итерация	Корень (метод простых итераций)	Погрешность
0	1,2	1,2			0	0,65	
0,1	1,004837	1,104837418	-0,95162582		1	0,722045777	0,072046
0,2	0,818731	1,018730753	-0,86106665		2	0,685757487	-0,036288
0,3	0,640818	0,940818221	-0,779125324		3	0,703708532	0,017951
0,4	0,47032	0,870320046	-0,704981746		4	0,694747112	-0,008961
0,5	0,306531	0,80653066	-0,637893863		5	0,699200674	0,004454
0,6	0,148812	0,748811636	-0,577190236	сходится	6	0,696982396	-0,002218
0,7	-0,00341	0,696585304	-0,522263323	сходится	7	0,698086065	0,001104
0,8	-0,15067	0,649328964	-0,472563397		8	0,697536646	-0,000549
0,9	-0,29343	0,60656966	-0,427593044		9	0,697810077	0,000273
1	-0,43212	-1,386902186	-19,93471845		10	0,697673979	-0,000136
					11	0,697741716	6,77E-05

Рис. 2.2. Метод простых итераций в Excel.

Далее проводится итерационный процесс по методу простых итераций (4), который прекращается при достижении заданной точности 0.0001.

Рассмотрим другой метод решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$ в среде Excel – метод секущих (рис. 2.3.).

Табуляция	Значение функции	Производная (разностное уравнение)	Вторая производная (разностное уравнение)	Итерация	Корень (метод секущих)	Значение функции
0	1,2			0	0,6	0,148811636
0,1	1,004837	-1,95162582		1	0,7	-0,003414696
0,2	0,818731	-1,86106665	0,905591701	2	0,697757	-5,63499E-05
0,3	0,640818	-1,779125324	0,819413256			
0,4	0,47032	-1,704981746	0,741435775			
0,5	0,306531	-1,637893863	0,670878832			
0,6	0,148812	-1,577190236	0,60703627	x0		
0,7	-0,003415	-1,522263323	0,549269132	x1		
0,8	-0,150671	-1,472563397	0,496999263			
0,9	-0,29343	-1,427593044	0,44970353			
1	-0,432121	-1,386902186	0,406908581			

Рис. 2.3. Метод секущих в Excel.

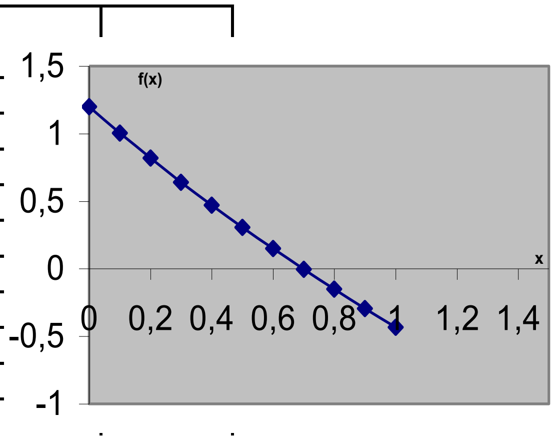
В этом методе помимо проверки истинности теорем I и II делается вывод о том, какой конец отрезка будет взят за начальное приближение x_0 аналогично методу касательных условие (17). Кроме того, в методе секущих в итерационном процессе поиска корня изменяются оба конца отрезка и на начальном этапе необходимо знать две начальные точки x_0 и x_1 уточнения корня, за которые принимаются концы отрезка.

Итерационный процесс осуществляется по формуле (24), а окончание итерационного процесса по той же формуле (5) и (6).

Метод секущих характеризуется более быстрой сходимостью к корню, чем некомбинированные методы (рис. 2.3).

Рассмотрим метод половинного деления в среде Excel для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$ (рис. 2.4.). Напомним, что для единственного метода половинного деления необязательно выполнение теорем I и II.

Табуляция	Значение функции
0	1,2
0,1	1,004837
0,2	0,818731
0,3	0,640818
0,4	0,47032
0,5	0,306531
0,6	0,148812
0,7	-0,003415
0,8	-0,150671
0,9	-0,29343
1	-0,432121



Итерация	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)
0	0,6	0,7	0,65	0,1488	-0,0034	0,072045777
1	0,65	0,7	0,675	0,072	-0,0034	0,034156421
2	0,675	0,7	0,6875	0,0342	-0,0034	0,015331578
3	0,6875	0,7	0,69375	0,0153	-0,0034	0,005948681
4	0,69375	0,7	0,696875	0,0059	-0,0034	0,00126456
5	0,696875	0,7	0,698438	0,0013	-0,0034	-0,001075675
6	0,696875	0,69844	0,697656	0,0013	-0,0011	9,42906E-05
7	0,697656	0,69844	0,698047	9E-05	-0,0011	-0,00049073
8	0,697656	0,69805	0,697852	9E-05	-0,0005	-0,000198229
9	0,697656	0,69785	0,697754	9E-05	-0,0002	-5,19718E-05
10	0,697656	0,69775	0,697705	9E-05	-5E-05	2,11588E-05

Рис. 2.4. Метод половинного деления в Excel.

Отделив корень уравнения численным и графическим методами (рис. 2.4) приступаем к формуле метода (21), используя логическую функцию Excel «ЕСЛИ». Окончание итерационного процесса по той же формуле (20).

ПРИЛОЖЕНИЕ А. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Решить нелинейное уравнение f(x)=0 с погрешностью $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0.0001$. Выполнить вычисления с использованием формул методов и встроенных функций. Ответ записать в виде: ***x=число*** $\pm$ ***абсолютная погрешность.***

Таблица 2. Варианты индивидуальных заданий

№	f(x)=0	Метод отделения корня	Методы уточнения корня
1	$\ln x + 0{,}55x = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
2	$e^{-x} - x^3 + 0{,}3 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
3	$1{,}5\ln x - 1/x = 0$	численный	Итераций, пол. деления, секущих, Векстейна
4	$e^{-x} - x^3 - 0{,}1 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
5	$\sin x + x^3 - 1{,}3 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, секущих
6	$\cos x - x^3 - 0{,}28 = 0$	численный	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
7	$e^x + x^2 + x - 3{,}5 = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
8	$e^{-x} - (x-2)^2 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
9	$e^{-x} + x^2 - 1{,}5 = 0$	численный	Итераций, пол. деления, Ньютона-Эйлера, Векстейна
10	$e^x + x^2 - 2{,}5 = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
11	$e^x + x^3 - 2 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
12	$e^x + x^3 + x^2 - 3{,}1 = 0$	численный	Итераций, пол. деления, Ньютона-

			Эйлера, секущих
13	$e^{-x}+x^2+x-2{,}1=0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
14	$e^{-x}-x^3-0{,}5=0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
15	$\cos x-x^3-0{,}6=0$	численный	Итераций пол. деления, Ньютона-Эйлера, секущих
16	$e^{x}-3(x-1)^2=0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
17	$1{,}2\lg x-1/x^2=0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
18	$2e^{-x}-x^2=0$	численный	Итераций, пол. деления, комб. хорд и касат., Векстейна
19	$e^{-2x}-x^2=0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
20	$\cos x-x^3-0{,}2=0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
21	$\ln x+0{,}517x=0$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
22	$\lg x+0{,}26x-0{,}51=0$	графический	Итераций, хорд, золотого сечения, Ньютона-Эйлера
23	$\sin x+x^3-0{,}3=0$	аналитический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
24	$1{,}6\ln x+0{,}6x=0$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
25	$e^{x}+x^3+x^2-3{,}5=0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, секущих
26	$e^{-x}-x^3-0{,}13=0$	аналитический	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
27	$x-3\cos^2(1{,}04x)=0$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих

28	$e^{-x}-2x+0{,}5=0$	графический	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
29	$\cos x-x+0{,}2=0$	аналитический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
30	$e^{-x}-3{,}5x+0{,}13=0$	численный	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
31	$\sin x-x+0{,}4=0$	графический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
32	$\ln x-x/2+2=0$	аналитический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
33	$2\cdot arctg(x)-3x+1=0$	численный	Итераций пол. деления, Ньютона-Эйлера, секущих
34	$\arcsin(x)-2x+0.5=0$	графический	Итераций, пол. деления, комб. хорд и касат., Векстейна
35	$e^{-2x}-3x+0.01=0$	аналитический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
36	$e^{x}+x^{3}+x^{2}+x-4=0$	численный	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
37	$\ln x+0{,}5x+0.2=0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
38	$3\cdot arctg(x/2)-4x+2=0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
39	$\arcsin(x)-x/2-0.1=0$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
40	$e^{-4x}-4x+4=0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Приближенное решение нелинейных уравнений с одним неизвестным. Постановка задачи. Этапы решения. Способы отделения корней.
2. Условия применимости (сходимости) методов решение нелинейных уравнений с одним неизвестным.
3. Уточнение корней нелинейных уравнений с одним неизвестным методом половинного деления. Расчетные формулы, алгоритм, графическая интерпретация.
4. Уточнение корней нелинейных уравнений с одним неизвестным методом итераций. Расчетные формулы, алгоритм, графическая интерпретация.
5. Уточнение корней нелинейных уравнений с одним неизвестным универсальным методом итераций. Расчетные формулы, алгоритм.
6. Вывод уравнения метода касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
7. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным методом касательных.
8. Достоинства и недостатки метода касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
9. Модификации метода касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
10. Сущность и графическая интерпретация метода хорд для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
11. Вывод уравнения метода хорд для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
12. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным методом хорд.
13. Достоинства и недостатки метода хорд для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
14. Сущность и графическая интерпретация комбинированного метода хорд и касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

15. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным комбинированным методом хорд и касательных.

16. Достоинства и недостатки комбинированного метода для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

17. Сущность и графическая интерпретация метода Векстейна для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

18. Вывод уравнения метода Векстейна для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

19. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным методом Векстейна. Достоинства и недостатки метода.

20. Алгоритм решения нелинейных уравнений методом золотого сечения. Достоинства и недостатки метода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зенков А. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования / Зенков Андрей Вячеславович. - Москва: Юрайт, 2022. - 122 с.

2. Волков Е. А. Численные методы : учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 252 с.