Министерство образования Тульской области
Государственное профессиональное образовательное учреждение
Тульской области «Донской политехнический колледж»

# УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для студентов, обучающихся по специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование
ОП.10 Численные методы
по теме «Элементарная теория погрешностей»

Автор:
А.С. Тивиков, преподаватель ГПОУ ТО «ДПК»

2024 г.

Лист согласования:

Автор разработки:

Тивиков А.С., преподаватель ГПОУ ТО «ДПК»

Рецензенты:

Евтехова О.А., заместитель директора по учебной и научно- методической работе ГПОУ ТО «ДПК»
Панченко Т.А., заместитель директора по организации образовательного процесса ГПОУ ТО «ДПК»
Филатова Е.А., старший методист ГПОУ ТО «ДПК»

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование», изучающих курс «Численные методы» и содержит основные понятия элементарной теории погрешностей, сведения о правилах получения, преобразования и формах записи приближённых чисел, а также приведены примеры решения задач по теории погрешностей, представлены варианты контрольных заданий.

СОГЛАСОВАНО

на заседании предметной (цикловой) комиссии дисциплин профессионального цикла отделения «Информационные системы и программирование»

Протокол № 3

от «12» октября 2024 г.

Председатель ПЦК    Демихова И.Ю.

# ВВЕДЕНИЕ

При проведении расчётов студент имеет дело с различными математическими зависимостями, используя точные и приближённые числа. Цель учебного пособия заключается в том, чтобы рассмотреть основные понятия элементарной теории погрешностей, сведения о правилах получения, преобразования и формах записи приближённых чисел.

Учебное пособие состоит из трёх глав, в которых рассмотрены основные теоретические положения и особенности решения задач элементарной теории погрешностей.

В первой главе рассмотрены основные понятия теории погрешностей. Приведены виды погрешностей, точные и интервальные оценки, рассмотрены примеры получения приближённых чисел и их оценок, а также формы записи приближенных чисел. Приведены примеры на округление и запись различных форм записи.

Во второй главе рассмотрены погрешности арифметических операций.

В третьей главе рассмотрены методы решения прямых и обратных задач теории погрешностей.

Учебное пособие позволит студентам освоить и использовать методы элементарной теории погрешностей.

## СОДЕРЖАНИЕ

## 1. Основные понятия теории погрешностей

### 1.1. Приближённое число и его погрешность

В инженерной практике при выполнении вычислительных операций используются точные и приближённые числа. Причем степень приближения числа к точному значению оценивается погрешностью. *Погрешностью* назовем оценку степени неточности числа, при этом *приближённым числом* - число, имеющее погрешность.

Точное число на числовой оси изображается точкой, а приближенное отрезком. Ширина отрезка определяется абсолютной погрешностью числа, а местоположение отрезка, его значением, местоположение отрезка и его ширина определяют точность приближенного числа. Чем шире отрезок и чем больше его положение к началу координат, тем ниже точность приближенного числа.

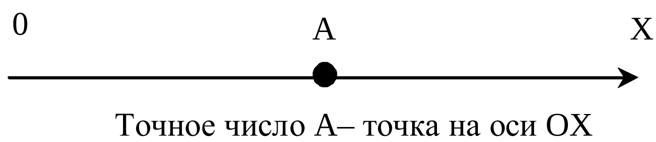


Рис. 1.1. Точное число (пример числа 3.253).

Графическая интерпретация точного и приближённого числа приведена на рис. 1 и рис. 2.

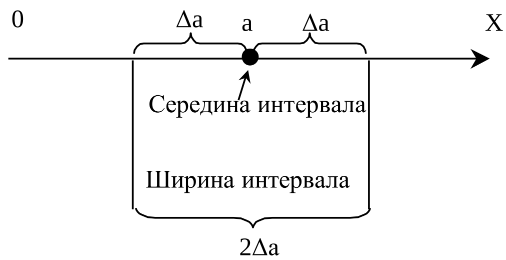


Рис. 1.2. Приближённое число (пример: 3.253±0.002).

Результаты инженерных расчётов, как правило, приближённые числа. Погрешность суммарного результата составляют следующие слагаемые (рис. 3):

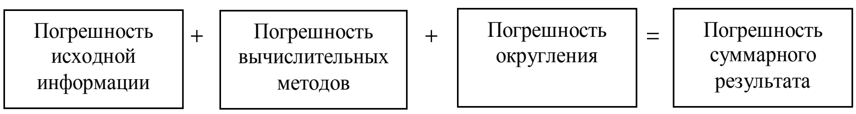


Рис. 1. 3. Погрешность суммарного результата.

Погрешность исходной информации получают из приборных измерений (погрешность прибора), а также из таблиц и справочников. Погрешность вычислительных методов и погрешность округления изучаются в курсе «Численные методы».

### 1.2. Виды погрешностей. Точные и интервальные оценки

Точность приближённого результата оценивают абсолютной и относительной погрешностью.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta a^{*} = \left| a_{ист} - a_{приб} \right| \tag{1}$$

где $\Delta a^{*}$ – абсолютная погрешность; $a_{ист}$ – истинное (точное) значение величины; $a_{приб}$ – приближённое значение величины.

Так как истинное значение величины, как правило, неизвестно то задаются большим значением абсолютной погрешности – *предельной абсолютной погрешностью $\Delta a$*, которая в пределе равенства эквивалентна абсолютной погрешности $\Delta a^{*}$:

$$\Delta a \geq \left| a_{ист} - a_{приб} \right| \tag{2}$$

Размерность абсолютной погрешности такая же, как размерность физической величины (кг, Мпа и т.п.)

Относительная погрешность:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{\left| a_{ист} \right|} \approx \frac{\Delta a}{\left| a_{приб} \right|} \text{ или в процентах } \delta a = \frac{\Delta a}{\left| a \right|} \cdot 100\% \tag{3}$$

Относительная погрешность величина безразмерная, но обычно она указывается в долях, в процентах (сотые доли числа), в промилле (тысячные доли числа), продецимелле (десятичная доля числа) – применяется для очень точных чисел.

Обычно в записи погрешности сохраняют 1 или 2 значащие цифры. В промежуточных расчетах рекомендуются сохранять больше значащих цифр, чем в погрешности.

Существуют понятия точечные и интервальные оценки. Значение любой физической величины без указания погрешности называют точечной оценкой. Указывая число с погрешностью, указывают, так называемую, интервальную оценку.

## 1.3. Примеры получения приближённых чисел и их оценок (точечных и интервальных)

Важно знать способы получения точечных и интервальных оценок для приближённого числа.

*Пример 1.* В результате четырёх измерений температуры получены данные: $T_1$=362.5 ºС, $T_2$=363.1 ºС $T_3$=362.3 ºС $T_1$=362.4 ºС. Используя понятие среднеарифметического найти точечную и интервальную оценку приближённого числа.

Решение. Точечная оценка есть среднеарифметическое:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{4} T_i}{n} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} = \frac{362.5 + 363.1 + 362.3 + 362.4}{4} = 362.575^{\circ} C$$

интервальная оценка:

$$\Delta T = \max\left|\Delta T_i\right| = \max\left|\overline{T} - T_i\right| = \max\begin{pmatrix} \left|\overline{T} - T_1\right| \\ \left|\overline{T} - T_2\right| \\ \left|\overline{T} - T_3\right| \\ \left|\overline{T} - T_4\right| \end{pmatrix} =$$

$$= \max\begin{pmatrix} |362.575 - 362.5| \\ |362.575 - 363.1| \\ |362.575 - 362.3| \\ |362.575 - 362.4| \end{pmatrix} = \max\begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.525 \\ 0.275 \\ 0.175 \end{pmatrix} = 0.525^{\circ} C$$

Ответ: T=362.575±0.525 ºС

*Пример 2*. В результате 18 измерений температуры различными приборами получены данные: измерения ртутным термометром 5 раз дали $T_1$=362.5 ºС, измерения термопарой 2 раза дали $T_2$=363.1 ºС, измерения термометром сопротивления 7 раз дали $T_3$=362.3 ºС, измерения пирометром излучения 4 раза дали $T_1$=362.4 ºС. Используя понятие средневесового числа, найти точечную и интервальную оценку приближённого числа.

Решение. Точечная оценка есть средневесовое всех приведенных измерений:

$$\overline{T}=\frac{\sum_{i=1}^{4}n_iT_i}{\sum_{i=1}^{4}n_i}=\frac{n_1T_1+n_2T_2+n_3T_3+n_4T_4}{n_1+n_2+n_3+n_4}=$$
$$=\frac{5\cdot 362.5+2\cdot 363.1+7\cdot 362.3+4\cdot 362.4}{5+2+7+4}=362.47^{\circ}C$$

интервальная оценка:

$$\Delta T=\max\left|\Delta T_i\right|=\max\left|\overline{T}-T_i\right|=\max\begin{pmatrix}\left|\overline{T}-T_1\right|\\ \left|\overline{T}-T_2\right|\\ \left|\overline{T}-T_3\right|\\ \left|\overline{T}-T_4\right|\end{pmatrix}=$$
$$=\max\begin{pmatrix}|362.47-362.5|\\ |362.47-363.1|\\ |362.47-362.3|\\ |362.47-362.4|\end{pmatrix}=\max\begin{pmatrix}0.03\\ 0.63\\ 0.17\\ 0.07\end{pmatrix}=0.63^{\circ}C$$

Ответ: T=362.47±0.63°C

## 1.4. Значащие, верные, сомнительные цифры приближённого числа

•*Значащими* цифрами приближённого числа называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля и нули, расположенные между ненулевыми цифрами или в конце числа для сохранения разряда точности.

*Пример 3*: подчёркнутые цифры следующих чисел значащие 0.0<u>130500</u> –6 значащих цифр; 0.<u>10001</u> – 5 значащих цифр; 0.00<u>2000</u> – 4 значащие цифры; <u>11.805</u> – 5 значащих цифр

•Цифра приближённого числа считается *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит 5 единиц в разряде, следующем за этой цифрой. Все остальные цифры числа будут *сомнительными*.

Приближенно верные цифры числа можно определить как цифры, которые не меняются при добавлении (или вычитании) к числу его погрешности.

Алгоритм определения верных цифр сводится к следующему:

1. определяем приближенно верные цифры числа добавлением погрешности;

2. проверяем по определению верность цифр, лежащих на границе верные – сомнительные цифры: пишем исходную погрешность, затем пишем 0.5 умноженное на 10 в степени разряда, в котором стоит цифра и расставляем знак (больше или меньше) в соответствии с которым судим о том верная ли цифра.

*Пример 4:* определить верные и сомнительные цифры следующих чисел:

a) a=45.721±0.033

| *1 этап* | *2 этап (по определению)* |
|---|---|
| $\underline{45.7}21$ | Цифра 7 $0.033 > 0.5x10^{-1}$ |
| + | сомнительная |
| 0.033 | Цифра 2 $0.033 > 0.5x10^{-2}$ |
| ________ | сомнительная |
| $\underline{45.7}54$ | Т.к. цифра 7 оказалась |
| (те цифры, которые | неверной цифрой, то следует |
| не изменились – | проверить по правилам |
| верные 4 5 7) | предыдущую цифру на |
| | верность. |
| | Цифра 5 $0.033 < 0.5x10^{0}$ |
| | верная |

Ответ: в числе a цифры 4, 5 - верные , а 7,2,1 – сомнительные.

b) b=23.746±0.003

| *1 этап* | *2 этап (по определению)* |
|---|---|
| $\underline{23.74}6$ | Цифра 4 $0.003 < 0.5x10^{-2}$ |
| + | верная |
| 0.003 | Цифра 6 $0.003 > 0.5x10^{-3}$ |
| ________ | сомнительная |
| $\underline{23.74}9$ | |
| (те цифры, | |
| которые не | |
| изменились – верные | |

2 3 7 4)

c) c=5.751±0.002

| *1 этап* | *II этап (по определению)* |
|---|---|
| <u>5.75</u>1 | Цифра 5 $0.002 < 0.5x10^{-2}$ |
| + | верная |
| 0.002 | Цифра 1 $0.002 > 0.5x10^{-3}$ |
| ________ | сомнительная |
| <u>5.75</u>3 | |
| (те цифры, которые не изменились – верные 5 7 5) | |

### 1.5. Три формы записи приближённых чисел

1) *В гарантированной форме* (точные в узком смысле) - со всеми верными цифрами (*сомнительных цифр нет*). Погрешность не указывается, а подразумевается предельная абсолютная погрешность - цифра 5 в первом отбрасываемом правом разряде.

2) *Форма Крылова* (точные в широком смысле) – *с одной сомнительной цифрой*, но погрешность числа при этом не должна превышать 2 единиц (1 единицы в зарубежных источниках) в разряде сомнительной цифры. Погрешность не указывается, а подразумевается абсолютная погрешность в 2 единицы (1 единицы в зарубежных источниках) в разряде сомнительной цифры.

3) *С явным указанием погрешности* (*с 1-2 сомнительными цифрами и погрешностью числа*). В погрешности - указывают *не более двух значащих* цифр (т.е. 17.583±0.0<u>12</u> верно, 17.583±0.<u>121</u> неверно, т.к. в погрешности 3 цифры). Причём важным является то, что для этой формы записи количество цифр после запятой в числе и в погрешности одинаково (т.е. 17.583±0.012 верно, а 17.58±0.012 или 17.583±0.012137 неверно).

*Пример 5.*

<u>Гарантированная форма</u>:

$a_г$=5.768 подразумеваем $\Delta a$=0.0005 (в правом ненаписанном разряде 5, остальные нули дописываем).

$b_г$=764 подразумеваем $\Delta b$=0.5 (в правом ненаписанном разряде 5, остальные нули дописываем).

$c_г=3.01x10^4$ подразумеваем $\Delta c=0.005x10^4$ (в правом ненаписанном разряде 5, остальные нули и степень дописываем).

Форма Крылова

$d_к$=32.143 подразумеваем $\Delta d$=0.002 (в разряде последней сомнительной цифры пишем 2, остальные нули дописываем)

$e_к$=117 подразумеваем $\Delta d$=2 (в разряде последней сомнительной цифры пишем 2)

$f_к=1.22x10^3$ подразумеваем $\Delta d=0.02x10^3$ (в разряде последней сомнительной цифры пишем 2, остальные нули и степень дописываем)

С явным указанием погрешности

g=0.0532±0.0007 в этой форме, как правило, в самой погрешности пишут одну, максимум две значащие цифры.

h=231.500±0.013 в этой форме главное – в числе и в погрешности одно и тоже количество цифр после запятой.

### 1.6. Правила округления

Правила округления:

Если отбрасываемая часть начинается с цифры 5 и больше, то последний оставленный разряд увеличивается на 1, иначе он не изменяется.

Погрешность округления суммируется с абсолютной погрешностью числа, всегда её увеличивая.

Погрешности округляют только в большую сторону в прямых задачах теории погрешностей и в только в меньшую сторону в обратных задачах теории погрешностей.

*Пример 6.* Округлить число a=17.15625±0.00111 до 4 значащих цифр.

*Решение.*

1. округляем число до 4 значащие цифры по правилам округления - 17.16;

2. определяем погрешность округления Δокр=|17.15625-17.16|=0.00375;

3. складываем исходную погрешность и погрешность округления и определяем погрешность результата: 0.00375+0.00111=0.00486; по правилам записи погрешности оставим в числе 0.00486 только одну значащую цифру.

4. таким образом, результат следует записать в виде a=17.16±0.005.

если требуется записать округленное число по правилам записи округленных чисел в форме с явным указанием погрешности, то по правилам записи в погрешности и самом приближенном числе должно быть одинаковое количество цифр после запятой, т.е. a=17.16±0.01.

*Пример 7*. Записать число b=17.15625±0.0176 в гарантированной форме и в форме Крылова.

*Решение*.

а) Гарантированная форма.

1. округлим число грубо, оставляя только верные цифры (первые 3 не изменяются при добавлении погрешности), по правилам округления последний разряд увеличивается на единицу b=17.2;

2. определяем погрешность округления Δокр=|17.15625-17.2|=0.04375;

3. складываем исходную погрешность и погрешность округления и определяем погрешность результата: 0.04375+0.0176=0.06135;

4. проверяем верность последней цифры в округленном числе.

если бы b=17.2 было записано в гарантированной форме, то истинная погрешность числа с учетом округления 0.06135 должна быть меньше подразумеваемой предельной погрешности 0.05, а на самом деле полученная погрешность округления больше 0.06135>0.05, следовательно, округление **исходного** числа следует продолжить, уменьшая количество цифр в числе до двух: b=17.

5.выполним проверку нового округленного числа

Δокр=|17.15625-17 |=0.15625; 0.15625+0.0176=0.17385

если бы b=17 было записано в гарантированной форме, то истинная погрешность числа с учетом округления 0.17385 должна быть меньше подразумеваемой предельной погрешности 0.5 – полученная погрешность округления меньше 0.17385<0.5, следовательно, $b_г$=17.

б) Форма Крылова.

1.округляем число до 4 значащих цифр, оставляя в нем одну сомнительную цифру (первые 3 не изменяются при добавлении погрешности), по правилам округления последний разряд увеличивается на единицу.

2. определяем погрешность округления Δокр=|17.16-17.2|=0.00375;

4. проверяем верность последней цифры в округленном числе.

3. складываем исходную погрешность и погрешность округления и определяем погрешность результата: 0.00375+0.0176=0.02135;

4. проверяем верность последней цифры в округленном числе.

если бы b=17.16 было записано в форме Крылова, то истинная погрешность числа с учетом округления 0.02135 должна быть меньше подразумеваемой предельной погрешности 0.02 – полученная погрешность округления 0.02135>0.02, следовательно, округление исходного числа следует продолжить, уменьшая количество цифр в числе : b=17.2

5.выполним проверку нового округленного числа

Δокр=|17.15625-17.2 |=0.04375; 0.04375+0.0176=0.06135

если бы b=17.2 было записано в форме Крылова, то истинная погрешность числа с учетом округления 0.06135 должна быть меньше подразумеваемой предельной погрешности 0.2 – полученная погрешность округления меньше 0.06135<0.2, следовательно, bк=17.2.

*Пример 8*. Записать число с=1672.2±0.85 в гарантированной форме.

*Решение*. Чтобы округления числа были более наглядными, запишем его в показательной или нормализованной форме.

*Показательной формой* числа называется запись, в которой число представляется в форме произведения мантиссы числа на 10 в некоторой степени.

*Нормализованной формой* числа называется показательная форма числа, мантисса которой лежит в диапазоне от нуля до одного.

В показательной форме число *c* можно представить как $c=(1.6722 \pm 0.00085)x10^3$

1.округляем число до 3 значащих цифр $c=1.67$

2. определяем погрешность округления $\Delta$окр=|1.67-1.6722|=0.0022;

3. складываем исходную погрешность и погрешность округления и определяем погрешность результата: 0.0022+0.00085=0.00305;

4. проверяем верность последней цифры в округленном числе.

если бы $c=1.67\cdot10^3$ было записано в гарантированной форме, то истинная погрешность числа с учетом округления $0.00305\cdot10^3$ должна быть меньше подразумеваемой предельной погрешности $0.005\cdot10^3$ – полученная погрешность округления $0.00305\cdot10^3<0.005\cdot10^3$, следовательно: $c_г=1.67\cdot10^3$

*Примечание*: Нельзя записывать окончательный результат в форме $c_г=1670$, так как у этого числа подразумеваемая погрешность 0.5, а у полученного числа $c_г=1.67\cdot10^3$ подразумеваемая погрешность $0.005\cdot10^3=5$.

*Пример 9*. Записать число $d=1732.4 \pm 2$ в гарантированной форме.

*Решение*. Удобно выполнять округление, представив число *d* в нормализованной форме, т.е. $d=(0.17324 \pm 0.0002)\cdot10^4$

1.округляем число до 4 значащих цифр $d=0.173$

2. определяем погрешность округления $\Delta$окр=|0.173-0.17324|=0.00024;

3. складываем исходную погрешность и погрешность округления и определяем погрешность результата: 0.00024+0.0002=0.00044;

4. проверяем верность последней цифры в округленном числе.

если бы $d=0.173\cdot10^4$ было записано в гарантированной форме, то истинная погрешность числа с учетом округления $0.00044\cdot10^4$ должна быть меньше подразумеваемой предельной погрешности $0.0005\cdot10^4$ – полученная погрешность округления $0.000445\cdot10^4<0.0005\cdot10^4$, следовательно: $d_г=1.67\cdot10^4$

## 2. Погрешность арифметических операций

1. **Предельная абсолютная погрешность** алгебраической суммы $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$ не превышает сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых $\Delta s = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Следствие: предельная абсолютная погрешность разности тоже не превышает сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

*Пример10.* Найти абсолютные погрешности суммы и разности приближённых чисел: a=117.890±0.003 b=11.670±0.001

*Решение.* s = a + b =117.890+11.670=129.560 Δs=Δa+Δb=0.003+0.001=0.004
r = a - b =117.890-11.670=106.210 Δs=Δa+Δb=0.003+0.001=0.004

2. **Предельная относительная погрешность** частного и произведения $V = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m}$ не превышает сумму предельных относительных погрешностей чисел, участвующих в операции: $\delta V = \delta a_1 + \delta a_2 + \ldots + \delta a_n + \delta b_1 + \delta b_2 + \ldots + \delta b_m$

3. Предельная относительная погрешность степени $n$ числа $a$ не превышает предельную относительную погрешность основания $a$ увеличенную в $n$ раз : $U=x^n$ по формуле $\delta u=n\delta x$.

*Пример11.* Найти абсолютную погрешность результата y=a·c/b, если $a_г$=1.482, $b_к$=-28.763, c=7.675±0.003

*Решение.* y=1.482·7.675/(-28.763)=-0.39545 погрешности Δa=0.0005, Δb=0.002, Δc=0.003. Исходя из определения погрешности частного и произведения: δy=δa+δc+δb. Относительные погрешности чисел a, b, c можем найти, зная их абсолютные погрешности: δy =Δa/|a|+Δc/|c|+Δb/|b|, а абсолютную погрешность результата найдём по формуле Δy=|y|·δy и окончательно имеем:

$$\Delta y = \delta y \cdot |y| = \left(\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta c}{|c|} + \frac{\Delta b}{|b|}\right) \cdot |y| = \left(\frac{0.0005}{1.482} + \frac{0.003}{7.675} + \frac{0.002}{28.763}\right) \cdot 0.39545 =$$
$$= 0.0003151$$

4. Погрешность от функции $s=f(a_i)$ находится по формуле (используется разложение в ряд Тейлора):

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \qquad (5)$$

## 3. Задачи теории погрешностей

Все задачи теории погрешности можно разбить на 2 группы:

- прямые задачи теории погрешностей — когда по известным погрешностям аргументов находят погрешность функции;
- обратные задачи теории погрешности — когда требуется оценить предельные погрешности аргументов по заданной погрешности функции.

### 3.1. Методы решения прямых задач теории погрешности

В прямых задачах теории погрешности должны быть заданы выражения для вычисляемой функции и значения аргументов с указанием их погрешности в явной или неявной форме. Решать прямые задачи теории погрешностей можно двумя методами:

А) пошагово (для каждой отдельной арифметической операции)

Б) по общей формуле погрешностей (5).

Решая прямую задачу поиска погрешности функции при пошаговом методе, все выражение разбивается на отдельные арифметические операции в порядке их выполнения с учетом скобок. Далее последовательно выполняются вычисления для каждой арифметической операции, и вычисляются абсолютная и относительная погрешности для каждой операции.

В тех случаях, когда функцию нельзя разложить на элементарные операции, и когда выражение для производных этой функции достаточно просты, удобно воспользоваться одной общей формулой погрешности.

*Пример12.* Для функции $y=a/b+a^2b^3-c\cdot a$ найти предельную абсолютную погрешность $\Delta y$ пошаговым методом и по общей формуле погрешности, если: $a=2.000\pm0.001$, $b=1.00\pm0.02$, $c=5\pm1$.

*Решение*

1) Разобьем заданную функцию на отдельные операции :

$$y1=a/b,\ y2= a^2\cdot b^3,\ y3= c\cdot a \quad ,y = y1+y2-y3$$

2) Найдем абсолютные погрешности составляющих:

$y1=a/b=2.000/1.00 =2.0000$

Это операция деления. По правилу 2 (П2) $\delta y1 = \delta a + \delta b$. По определению относительной погрешности $\delta a = \Delta a/|a| = 0.001/2.000 = 0.0005$ и $\delta b = \Delta b/|b| = 0.02/1.00 = 0.02$ , тогда $\delta y1 = 0.0005 + 0.02 = 0.0205$

Абсолютная погрешность через относительную погрешность может быть получена как $\Delta y1 = |y1| \cdot \delta y1 = 2.0000 \cdot 0.0205 = 0.041$

$y2 = a^2 \cdot b^3 = 2.000^2 \cdot 1.00^3 = 4.0000$

Это операция умножения. По правилам 2 и 3 () $\delta y2 = 2 \cdot \delta a + 3 \cdot \delta b$

Относительные погрешности $\delta a = 0.0005$ и $\delta b = 0.02$ были определены ранее, тогда $\delta y2 = 2 \cdot 0.0005 + 3 \cdot 0.02 = 0.061$ и абсолютная погрешность:

$\Delta y2 = |y2| \cdot \delta y2 = 4.0000 \cdot 0.061 = 0.244$

$y3 = c \cdot a = 5 \cdot 2.000 = 10.000$

Это операция умножения. По правилу 2 (п. 1.6.) $\delta y3 = \delta c + \delta a$

Относительная погрешности $\delta a$ была определена ранее $\delta a = 0.0005$ и по определению относительной погрешности $\delta c = \Delta c/|c| = 1/5 = 0.2$ , тогда $\delta y3 = 0.0005 + 0.2 = 0.2005$. Абсолютная погрешность: $\Delta y3 = |y3| \cdot \delta y3 = 10.000 \cdot 0.2005 = 2.005$

3) Вычислим погрешность результата. По правилу 1 (п. 1.6.) погрешность суммы и разности приближенных величин:

$\Delta y = \Delta y1 + \Delta y2 + \Delta y3 = 0.041 + 0.244 + 2.005 = 2.290$

4) Для вычислений погрешности по общей формуле погрешности находим: частные производные от исходного выражения по каждой из переменных и вычисляем значения производных

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{b} + 2ab^3 - c = \frac{1}{1} + 2 \cdot 2.000 \cdot 1.00^3 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -\frac{a}{b^2} + 3a^2b^2 = -\frac{2.000}{1.00^2} + 3 \cdot 2.000^2 \cdot 1.00^2 = 10.00$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -a = -2.000$$

и подставляем полученные значения производных в общую формулу погрешности (5).

## 3.2. Методы решения обратных задач теории погрешности

В результате решения обратной задачи теории погрешностей определяют величины предельных абсолютных погрешностей аргументов, при которых результирующая величина у будет иметь погрешность, не превышающую требуемую величину Δу или δу.

Чаще всего используются два метода решения обратных задач теории погрешностей:

а) метод равноточных аргументов

б) метод равного влияния аргументов

### 3.2.1. Метод равноточных аргументов

В основе метода лежит предположение том, что все аргументы имеют одинаковую точность. А так как точность приближенного числа определяется величиной его предельной относительной погрешности, то для функции нескольких аргументов можно записать: $\delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = \ldots = \delta a_n = \delta$.

Итак, в задаче дано:

Выражение для функции $y = f(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$;

Требуемая погрешность величины $y$ (абсолютная $\Delta y$ или относительная $\delta y$).

Необходимо вычислить предельные погрешности аргументов.

Общую формулу погрешности функции нескольких аргументов (5) можно записать в виде:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \cdot \Delta a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \cdot \delta a_i \cdot |a_i|\right) = \delta \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \cdot |a_i|\right)$$

Решим это уравнение относительно $\delta$:

$$\delta = \frac{\Delta y}{\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \cdot |a_i|\right)}.$$

Тогда предельные абсолютные погрешности аргументов (если необходимо найти именно их) можно выразить через относительную погрешность $\Delta a_i$ = $|a_i|\cdot\delta$.

*Пример 13.* Для заданной функции y определить предельные абсолютные погрешности аргументов, при которых абсолютная погрешность вычисления этой функции не будет превышать 0.01. Выражение для функции и значения аргументов известны.

Дано: $y = \frac{a}{b} + c^2$; Δy =0.01 ; $a = 5.2 \quad b = 4.0 \quad c = 1$

Найти значения: $\Delta a, \Delta b, \Delta c$

Решение

1. Для функции трех аргументов a, b, c формула погрешности примет вид:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot \Delta c$$

Так как относительные погрешности аргументов равны: δa = δb = δc = δ, то можно записать:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot |a| \cdot \frac{\Delta a}{|a|} + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot |b| \cdot \frac{\Delta b}{|b|} + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot |c| \cdot \frac{\Delta c}{|c|} = \left(\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot |a| + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot |b| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot |c|\right) \cdot \delta$$ Отсюда:

$$\delta a = \delta b = \delta c = \delta = \frac{\Delta y}{\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot |a| + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot |b| + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot |c|}.$$

2. Вычислим значения всех частных производных от функции y

$$\left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| = \frac{1}{b} = \frac{1}{4} = 0.25;$$

$$\left|\frac{\partial y}{\partial b}\right| = \left|a \cdot \left(-\frac{1}{b^2}\right)\right| = \frac{5.2}{16} = 0.325;$$

$$\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right| = 2 \cdot c = 2.$$

3. Вычислим значение предельной относительной погрешности $\delta = \dfrac{0.01}{0.25 \cdot 5.2 + 0.325 \cdot 4 + 2 \cdot 1} = 0.00217$.

4. Зная δ, найдём предельные абсолютные погрешности аргументов

$\Delta a = |a| \cdot \delta$; $\Delta b = |d| \cdot \delta$; $\Delta c = |c| \cdot \delta$;

$\Delta a = 5.2 \cdot 0.00217 = 0.0113$;

$\Delta b = 4 \cdot 0.00217 = 0.0087$;

$\Delta c = 1 \cdot 0.00217 = 0.0021$.

Ответ: Чтобы абсолютная погрешность вычисления заданной функции y не превышала значения 0.01, необходимо измерить или вычислить значения аргументов с абсолютной погрешностью не превышающей:

для *a — 0.011*, для *b — 0.008* и для *c — 0.002*.

*Пример 14.* Для заданной функции y округлить значения аргументов (и записать их в гарантированной форме) так, чтобы точность вычисления функции *y* была не ниже 2%. Выражение для функции и значения аргументов известны.

Дано: $y = \dfrac{a}{c} + ac^2$; δy =2 %; a = 5.12354; c = 5.3

Найти значения: $a_г$, $c_г$.

Решение

1. Для функции двух аргументов *a* и *c* формула погрешности примет вид:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot \Delta c$$

Так как по методу равноточных аргументов относительные погрешности аргументов равны: $\delta a = \delta c = \delta$, то можно записать:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot |a| \cdot \delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot |c| \cdot \delta c = \left(\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot |a| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot |c|\right) \cdot \delta$$

Отсюда:

$$\delta a = \delta c = \delta = \frac{\Delta y}{\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot |a| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot |c|}.$$

2. Вычислим значения всех частных производных от функции y

$$\left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| = \frac{1}{c} + c^2 = \frac{1}{5.3} + 5.3^2 = 28.2786;$$

$$\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right| = \left|a \cdot \left(-\frac{1}{c^2}\right) + a \cdot 2c\right| = \left|-\frac{5.12354}{5.3^2} + 5.12354 \cdot 2 \cdot 5.3\right| = 54.1271.$$

3. Вычислим значение функции y

$$y = \frac{a}{c} + ac^2 = \frac{5.12354}{5.3} + 5.12354 \cdot 5.3^2 = 144.8869$$

4. Вычислим значение предельной абсолютной погрешности величины y

*Δy = 0.02 144.8869 = 2.8977*

Как как решается обратная задача, то погрешность округляется в меньшую сторону, т.е. *Δy = 2.8*

5.Вычислим значение предельной относительной погрешности аргументов

$$\delta = \frac{2.8}{28.2786 \cdot 5.12354 + 54.1271 \cdot 5.3} = 0.0067 \; .$$

6. Зная $\delta$, найдём предельные абсолютные погрешности аргументов

$\Delta a = |a| \cdot \delta$;  $\Delta c = |c| \cdot \delta$;

Δa = 5.12354·0.0067 = 0.03432;

Δc = 5.3 ·0.0067 = 0.03551

7. Округлим значения аргументов до требуемой точности:

если в гарантированной форме числа *a* = 5.12354 оставить только 1 цифру «5», то погрешность такого числа не будет превышать 0.5, что много больше требуемой погрешности *Δa* =  0.03432;

если в гарантированной форме числа *a* = 5.12354 оставить только 2 цифры (округлить до 5.1), то погрешность такого числа не будет превышать 0.05, что больше требуемой погрешности *Δa* =  0.03432;

если в гарантированной форме числа *a* = 5.12354 оставить 3 цифры (округлить до 5.12), то погрешность такого числа не будет превышать 0.005, что будет меньше требуемой погрешности *Δa* =  0.03432. Следовательно, число а следует округлить до 5.12.

Аналогично для величины аргумента *c:*
если в гарантированной форме числа $c$ = 5.3 оставить все цифры (число не округлять), то погрешность такого числа не будет превышать 0.05, что больше требуемой погрешности $\Delta c =$ 0.03551; следовательно, в аргументе c не хватает точности и это число следует определить с большим количеством значащих цифр: если в гарантированной форме число $c$ = 5.30 записать с 3 цифрами (добавить к числу еще один дополнительный разряд), то погрешность такого числа не будет превышать 0.005, что будет меньше требуемой погрешности $\Delta c$ = 0.03551.

Ответ: значение величины $a$ следует округлить до 5.12, а в аргументе $c$ не хватает точности и это число следует определить с большим количеством значащих цифр — 5.30.

### 3.2.2 Метод равного влияния аргументов

Суть метода равного влияния аргументов на погрешность функции заключается в том, что каждый аргумент вносит одинаковую долю в погрешность функции т.е.:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \cdot \Delta a_i = const$$

По общей формуле погрешности (5):

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left( \left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right| \cdot \Delta a_i \right) = n \cdot const$$

где $n$ – количество аргументов функции.

Отсюда $\Delta a_i = \frac{\Delta y}{n\left|\frac{\partial f}{\partial a_i}\right|}$.

*Пример 15.* Для заданной функции у определить предельные абсолютные погрешности аргументов, при которых абсолютная погрешность вычисления этой функции не будет превышать 0.01. Выражение для функции и значения аргументов известны.

Дано: $y = \frac{a}{b} + c^2$; $\Delta y = 0.01$; $a = 5.2$; $b = 4.0$; $c = 1$.

Найти значения: $\Delta a, \Delta b, \Delta c$

Решение

1. Для функции трех аргументов *a, b, c* формула погрешности примет вид:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot \Delta c$$

И по методу равного влияния аргументов

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot \Delta a = \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot \Delta b = \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot \Delta c = k \ .$$

Функция имеет три аргумента n = 3

2. Вычислим значения всех частных производных от функции y

$$\left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| = \frac{1}{b} = \frac{1}{5.2} = 0.192; \quad \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right| = \left|a \cdot \frac{-1}{b^2}\right| = \frac{5.2}{16} = 0.325; \quad \left|\frac{\partial y}{\partial c}\right| = 2c = 2;$$

3. Вычислим долю каждого аргумента в погрешности функции

k = 0.01/3 = 0.003333

4. Найдём предельные абсолютные погрешности аргументов

$$\Delta a = \frac{0.01}{3 \cdot 0.192} = 0.0174;$$

$$\Delta b = \frac{0.01}{3 \cdot 0.325} = 0.010;$$

$$\Delta c = \frac{0.01}{3 \cdot 2} = 0.0017;$$

Ответ: Чтобы абсолютная погрешность вычисления заданной функции y не превышала значения 0.01, необходимо измерить или вычислить значения аргументов с абсолютной погрешностью не превышающей:

для *a -0.017*, для *b - 0.010* и для *c - 0.0017*.

### 3.3. Примеры решения обратной задачи теории погрешностей

*Пример 16.* Сколько значащих цифр следует оставить в значении величины *a* = 1.7365, чтобы погрешность этой величины не превышала 1 %.

Решение

1. Определим величину предельной абсолютной погрешности значения $a$

$\Delta a = 0.01 \cdot 1.7365 = 0.017365$

2. Округлим число 1.7365 так, чтобы его погрешность была не более предельной погрешности:

а) Запишем аргумент с одной цифрой после запятой $a = 1.7$

Тогда погрешность числа составит $\Delta a = |1.7365 - 1.7| = 0.0365$, что превышает величину предельной абсолютной погрешности значения $a$

$0.0365 > 0.017365$.

б) Запишем аргумент с 2 цифрами после запятой $a = 1.74$ (по правилам округления цифра 3 увеличена на 1, т.к. первая отброшенная цифра 6 > 5)

Тогда погрешность числа составит $\Delta a = |1.7365 - 1.74| = 0.0035$, что не превышает величину предельной абсолютной погрешности значения $a$

$0.0035 < 0.017365$.

Ответ: Чтобы погрешность величины $a$ не превышала 1 % в числе следует оставить при округлении 3 значащих цифры 1.74.

*Пример 17.* С каким числом верных знаков следует взять значение аргумента x, чтобы значение функции $y = x^3 \cdot \sin x$ было вычислено с погрешностью не превышающей $\delta y = 0.1 \cdot 10^{-5}$ если $x = \sqrt{2}$ (а $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$)

Решение

1. Определим предельную абсолютную погрешность функции

$\Delta y^{\max} = |y| \cdot \delta y = |x^3 \cdot \sin(x)| \cdot \delta y = 2.8 \cdot 10^{-6}$;

2. Определим предельную абсолютную погрешность аргумента

$\Delta x^{\max} = \dfrac{\Delta y}{\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|} = \dfrac{\Delta y}{|3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)|} = \dfrac{2.8 \cdot 10^{-6}}{\left|3 \cdot 2 \cdot \sin\sqrt{2^3} + 2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\right|} = 0.44 \cdot 10^{-6}$ Возьмём шесть цифр: $x*$=1.41421 тогда $\Delta x = |1.414213562 - 1.41421| = 3.5 \cdot 10^{-6} \rangle \Delta_x^{\max}$ (не подходит.)

Возьмём семь цифр: $x{*}{*}$=1,414213 тогда $\Delta x = |1.414213562 - 1.414214| = 4.38 \cdot 10^{-7} \langle \Delta_x^{\max}$ (подходит).

Ответ: Аргумент следует взять с семью значащими цифрами, чтобы погрешность функции была не более $\delta y = 0.1 \cdot 10^{-5}$.

*Пример 18.* Записать значение аргумента функции $y = x^3 \cdot \sin x$ в гарантированной форме но так, чтобы значение функции было вычислено с погрешностью не превышающей $\delta y = 0.1 \cdot 10^{-5}$ если $x = \sqrt{2}$ (а $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$)

Решение.

Вычислим предельные погрешности функции и аргумента как это описано в задаче 17 .

В обратных задачах погрешности округляют в *меньшую* сторону (для гарантированной формы до меньшей 5, для формы Крылова - до меньшей 2). При записи числа в гарантированной форме его погрешность должно быть меньше $0.44\ 10^{-6}$, т.е. она должно составлять $0.5\ 10^{-7}$ (так как $0.5\ 10^{-6} > 0.44\ 10^{-6}$). Чтобы предельная погрешность была меньше $0.5\ 10^{-7}$ , в исходном числе x=1.414213562 следует оставить 8 значащих цифр, т.е. $x_г$=1.4142135 (предполагаемая погрешность $\Delta a$=0.00000005).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. Пример решения контрольного задания

1. Вычислить функцию. Вычислить погрешность результата. Записать результат в трёх формах записи приближённого числа.
2. Вычислить функцию. Методом равноточных аргументов (для чётных вариантов) или методом равного влияния (для нечётных вариантов) найти абсолютные погрешности всех аргументов, при которых погрешность функции не будет превышать 1%. Определить, сколько значащих цифр следует оставить в аргументах при их округлении, если они будут представлены в гарантированной форме с требуемой точностью.

| № | Формула | Исходные данные |
|---|---|---|
| 31 | $y = a \cdot b^3 - \frac{c}{x} - \sqrt{k}$ | $a_k$=0.9656 $b_г$=2.765 c=18.768±0.0004<br>x=24.4800±0.0006 $k_г$=17.45 |

**Решение**

***Задача 1.*** Вычислим значение функции:

$$y = 0.9656 \cdot 2.756^3 - \frac{18.768}{24.4800} - \sqrt{17.45} = 15.26921$$

исходя из форм записи исходных данных:

$$\Delta a = 0.0002 \quad \Delta b = 0.0005 \quad \Delta c = 0.0004 \quad \Delta x = 0.0006 \quad \Delta k = 0.005$$

вычислим погрешность результата по арифметическим операциям, разбив выражение на части:

$$y = a \cdot b^3 - \frac{c}{x} - \sqrt{k} = y_1 - y_2 - y_3 \quad где \quad y_1 = a \cdot b^3 \quad y_2 = \frac{c}{x} \quad y_3 = \sqrt{k}$$

найдём абсолютные погрешности составляющих:

$$\Delta y_1 = |y_1| \cdot \delta y_1 = \left|a \cdot b^3\right| \cdot (\delta a + 3\delta b) = \left|a \cdot b^3\right| \cdot \left(\frac{\Delta a}{|a|} + 3\frac{\Delta b}{|b|}\right) =$$

$$= \left|0.9656 \cdot 2.756^3\right| \cdot \left(\frac{0.0002}{|0.9656|} + 3\frac{0.0005}{|2.765|}\right) = 0.01519$$

$$\Delta y_2 = |y_2| \cdot \delta y_2 = \left|\frac{c}{x}\right| \cdot (\delta c + \delta x) =$$

$$= \left|\frac{c}{x}\right| \cdot \left(\frac{\Delta c}{|c|} + \frac{\Delta x}{|x|}\right) = \left|\frac{18.768}{24.4800}\right| \cdot \left(\frac{0.0004}{|18.768|} + \frac{0.0006}{|24.4800|}\right) = 3.51307 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta y_3 = |y_3| \cdot \delta y_3 = \left|\sqrt{k}\right| \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \delta k\right) = \left|\sqrt{k}\right| \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta k}{|k|}\right) =$$

$$= \left|\sqrt{17.45}\right| \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{0.005}{|17.45|}\right) = 5.9847 \cdot 10^{-4}$$

погрешности и слагаемых и вычитаемых суммируются:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = 0.01582$$

итак, имеем расчётный ответ: $y = 15.26921 \pm 0.01582$, который представим в трёх формах записи.

A. для формы записи <u>с явным указанием погрешности</u> оставляем не более 2-х цифр *в погрешности* $15.26921 \pm 0.015|82$ (погрешности в прямых задачах округляются в большую сторону) и в самом числе оставляем столько же цифр после запятой $y^* = 15.269 \pm 0.016$

B. для записи результата в форме Крылова осуществляем округления до одной сомнительной цифры:

$$y = 15.27 \pm (|15.27 - 15.26921| + 0.01582) = 15.27 \pm 0.01661$$

если бы число y=15.27 было записано в <u>форме Крылова</u>, то предполагаемая максимальная предельная погрешность была бы 0.02: т.к. расчётная погрешность меньше предельной 0.01661<0.02, то в форме Крылова: $y_k = 15.27$

C. для записи результата в <u>гарантированной форме</u> осуществляем округления до всех верных цифр: $y = 15.3 \pm (|15.3 - 15.26921| + 0.01582) = 15.3 \pm 0.04661$ если бы число y=15.3 было записано в гарантированной форме, то его предполагаемая максимальная предельная погрешность была бы 0.05: т.к. расчётная погрешность меньше предельной 0.04661<0.05, то в гарантированной форме: $y_г = 15.3$

***Ответ.*** $y^* = 15.269 \pm 0.016$

$y_k = 15.27$

$y_г = 15.3$

***Задача 2***.

Вычислим значение функции:

$$y = a \cdot b^3 - \frac{c}{x} - \sqrt{k} = 0.9656 \cdot 2.756^3 - \frac{18.768}{24.4800} - \sqrt{17.45} = 15.26921$$

Имеем нечётный 31 вариант, следовательно, используем *метод равного влияния.*

Найдём погрешности 5-и аргументов по этому методу:

$$\Delta a = \frac{\Delta y}{5 \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial a}\right|} = \frac{|y| \cdot \delta y}{5 \cdot |b^3|} = \frac{15.26921 \cdot 0.01}{5 \cdot |2.756^3|} = 0.00146$$

$$\Delta b = \frac{\Delta y}{5 \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right|} = \frac{|y| \cdot \delta y}{5 \cdot |3ab^2|} = \frac{15.26921 \cdot 0.01}{5 \cdot |3 \cdot 0.9656 \cdot 2.756^2|} = 0.00139$$

$$\Delta c = \frac{\Delta y}{5 \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|} = \frac{|y| \cdot \delta y}{5 \cdot \left|\frac{-1}{x}\right|} = \frac{15.26921 \cdot 0.01}{5 \cdot \left|\frac{-1}{24.4800}\right|} = 0.74758$$

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{5 \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|} = \frac{|y| \cdot \delta y}{5 \cdot \left|\frac{-c}{x^2}\right|} = \frac{15.26921 \cdot 0.01}{5 \cdot \left|\frac{-18.768}{24.4800}\right|} = 0.03983$$

$$\Delta k = \frac{\Delta y}{5 \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial k}\right|} = \frac{|y| \cdot \delta y}{5 \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{k}}\right|} = \frac{15.26921 \cdot 0.01}{5 \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{17.45}}\right|} = 0.25536$$

Представим числа в гарантированной форме, учитывая, что в обратных задачах погрешности округляют в *меньшую* сторону (для гарантированной формы до меньшей 5, для формы Крылова - до меньшей 2).

A. Для $\Delta a = 0.00146$ ближайшее *меньшее* округление до цифры «5» 0.0005, а теперь для исходного числа a=0.9656 оставляем столько значащих цифр, чтобы оно имело именно такую предполагаемую погрешность <u>0.000</u>5 т.е. <u>3 цифры</u> $a_г$=0.966 (предполагаемая погрешность Δa=0.0005).

B. Для $\Delta b = 0.00139$ ближайшее *меньшее* округление до цифры «5» 0.0005, а теперь для исходного числа b=2.765 оставляем столько значащих цифр, чтобы оно имело именно такую предполагаемую погрешность <u>0.000</u>5 т.е. <u>4 цифры</u> $b_г$=2.765 (предполагаемая погрешность Δa=0.0005).

C. Для $\Delta c = 0.74758$ ближайшее *меньшее* округление до цифры «5» 0.5, а теперь для исходного числа c=18.768 оставляем столько значащих цифр, чтобы оно имело именно такую предполагаемую погрешность <u>0.</u>5 т.е. <u>2 цифры</u> $c_г$=19 (предполагаемая погрешность Δa=0.5).

D. Для $\Delta x = 0.03983$ ближайшее *меньшее* округление до цифры «5» 0.005, а теперь для исходного числа x=24.4800 оставляем столько значащих цифр, чтобы оно имело именно такую предполагаемую погрешность <u>0.00</u>5 т.е. <u>4 цифры</u> $x_г$=24.48 (предполагаемая погрешность Δa=0.005).

E. Для $\Delta k = 0.25536$ ближайшее *меньшее* округление до цифры «5» 0.05, а теперь для исходного числа k=17.45 оставляем столько значащих цифр, чтобы оно имело именно такую предполагаемую погрешность <u>0.0</u>5 т.е. <u>3 цифры</u> $k_г$=17.5 (предполагаемая погрешность Δa=0.05).

***Ответ.*** $y = 15.26921$

$\Delta a = 0.00146$ (3 значащие цифры $a_г$=0.966)

$\Delta b = 0.00139$ (4 значащие цифры $b_г$=2.765)

$\Delta c = 0.74758$ (2 значащие цифры $c_г$=19)

$\Delta x = 0.03983$ (4 значащие цифры $x_г$=24.48)

$\Delta k = 0.25536$ (3 значащие цифры $k_г$=17.5)

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Контрольные задания

1. Вычислить функцию. Вычислить погрешность результата. Записать результат в трёх формах записи приближённого числа.
2. Вычислить функцию. Методом равноточных аргументов (для чётных вариантов) или методом равного влияния (для нечётных вариантов) найти абсолютные погрешности всех аргументов, при которых погрешность функции не будет превышать 1%. Определить, сколько значащих цифр следует оставить в аргументах при их округлении, если они будут представлены в гарантированной форме с требуемой точностью.

*Таблица. Варианты индивидуальных заданий.*

| № | Формула | Исходные данные |
|---|---|---|
| 1 | $y = a \cdot b^2 - \frac{c}{x} + k$ | $a_k$=0.9656 $b_г$=2.765 c=18.768±0.0004<br>x=24.4800±0.0006 $k_г$=17.45 |
| 2 | $y = \frac{b}{a} - cx + k$ | $a_k$=0.9656 $b_г$=2.765 c=18.768±0.0004<br>x=24.480±0.0006 $k_г$=17.45 |
| 3 | $y = ab^2 - \frac{x}{c} - k$ | $a_k$=0.9656 $b_г$=2.765 c=18.768±0.0004<br>x=24.480±0.0006 $k_г$=17.45 |
| 4 | $y = \frac{b}{a} - cx + k$ | $a_k$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 |
| 5 | $y = a - \frac{c}{b} + \frac{x^2}{k}$ | $a_k$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 |
| 6 | $y = \frac{a}{b^2} - \frac{c}{x} + k$ | $a_k$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 |
| 7 | $y = \frac{a}{b} + \frac{x^2}{c} - k$ | $a_k$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 |
| 8 | $y = \frac{a^2}{b} - x^2c + k$ | $a_k$=154.5 $b_г$=9659 $c_k$ =234 x=98.3±0.6 $k_k$ =29854 |
| 9 | $y = ab - \frac{x^2}{c} - k$ | $a_k$=154.5 $b_г$=9659 $c_k$ =234 x=98.3±0.6<br>k=29854±26 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $y = a + b + ck$ | a $_г$=0.145 $b_г$=321 $c_г$ =78.2 $k_г$=2.096 |
| 11 | $y = a + b + cg$ | a $_г$=0.301 $b_г$=193.1 $c_г$ =11.58 $g_г$=3.76 |
| 12 | $y = a - b + cx$ | a $_г$=398.5 $b_г$=72.28 $c_г$ =0.3457 $x_г$=274.452 |
| 13 | $y = x_1 + x_2 + x_3x_2^2$ | $x_1$=197.6±0.2 $x_2$=23.44±0.22 $x_3$=201.55<br>$\delta x_3$=0.0843% |
| 14 | $y = ab - c + x^2$ | a $_г$=3.49 $b_г$=8.6 $c_г$ =12.48 $x_г$=2.765 |
| 15 | $y = ab - cx$ | a $_г$=25.1 $b_г$=1.743 $c_г$ =12.323 $x_г$=7.11 |
| 16 | $y = ab - \frac{c}{x}$ | a $_г$=0.22 $b_г$=16.5 $c_г$ =0.74 $x_г$=0.056 |
| 17 | $y = abc - x$ | a $_г$=0.253 $b_г$=654 $c_г$ =83.6 $x_k$=896.34 |
| 18 | $y = abc - x^2$ | a $_k$=8.764 $b_г$=19.31 c =0.9650±0.0002 $x_г$=194 |
| 19 | $y = \frac{b^2}{a} + \frac{c}{x} - k$ | a $_k$=0.9656 $b_г$=2.765 c=18.768±0.0004<br>x=24.4800±0.0006 $k_г$=17.45 |
| 20 | $y = ab^2 + \frac{x}{c} - k$ | a $_k$=0.9656 $b_г$=2.765 c=18.768±0.0004<br>x=24.4800±0.0006 $k_г$=17.45 |
| 21 | $y = m\frac{a}{k} - \frac{c}{b} + \frac{x^2}{k}$ | a $_k$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 m=0.8670±0.0007 |
| 22 | $y = \frac{a^2}{b} - xc + k$ | a $_k$=154.5 $b_г$=9.659 $c_k$ =234 x=98.3±0.6 $k_k$ =29854 |
| 23 | $y = a + b^2 + c^3k$ | a $_г$=0.145 $b_г$=321 $c_г$ =78.2 $k_г$=2.096 |
| 24 | $y = a^3b - \sqrt{c} + x^2$ | a $_г$=3.49 $b_г$=8.6 $c_г$ =12.48 $x_г$=2.765 |
| 25 | $y = 25a + b + c^2g^3$ | a $_г$=0.301 $b_г$=193.1 $c_г$ =11.58 $g_г$=3.76 |
| 26 | $y = \sqrt{x_1} + x_2 + \sqrt{x_3}x_2^2$ | $x_1$=197.6±0.2 $x_2$=23.44±0.22 $x_3$=201.55<br>$\delta x_3$=0.0843% |
| 27 | $y = x_1{}^2 + x_2{}^3 + x_3x_2$ | $x_1$=1.6±0.2 $x_2$=2.44±0.22 $x_3$=1.55 $\delta x_3$=0.843% |
| 28 | $y = x_1x_2{}^2 + \sqrt{x_3}$ | $x_1$=1.6±0.2 $x_2$=2.44±0.22 $x_3$=1.55 $\delta x_3$=0.843% |
| 29 | $y = \frac{a}{k} - \frac{cm}{b} + \frac{x^2}{k}$ | a $_k$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 m=0.8670±0.0007 |

| | | |
|---|---|---|
| 30 | $y=\frac{a}{k}-\frac{c}{bm}+\frac{x^2}{k}$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 m=0.8670±0.0007 |
| 31 | $y=ab-cx$ | $a_г$=0.301 $b_г$=193.1 $c_г$ =11.58 $x_г$=3.76 |
| 32 | $y=abc-x$ | $a_г$=0.301 $b_г$=193.1 $c_г$ =11.58 $x_г$=3.16 |
| 33 | $y=abc-x^2$ | $a_г$=0.301 $b_г$=193.1 $c_г$ =11.58 $x_г$=3.63 |
| 34 | $y=ab^2+\frac{x}{c}-k$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 |
| 35 | $y=a+b+ck$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 k=1.10±0.06 |
| 36 | $y=ab-\frac{c}{x}$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498 |
| 37 | $y=a+b+cg$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=5.0±0.2 g=19.0±0.2 |
| 38 | $y=a+b^2+c^3k$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=5.0±0.2 k=15.0±0.6 |
| 39 | $y=m\frac{a}{k}-\frac{c}{b}+\frac{x^2}{\sqrt{k}}$ | $a_к$=18955 $b_г$=168 c=2995±1 $x_г$ =498<br>k=1965.0±0.6 m=0.8670±0.0007 |
| 40 | $y=ab-c+\sqrt{x}$ | $a_к$=185 $b_г$=16.8 c=2995±1 $x_г$ =498 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. Теоретические вопросы

1. Понятие точных и приближённых чисел и их графическая интерпретация.
2. Из чего складывается погрешность исходного результата?
3. Что такое абсолютная погрешность?
4. Что такое относительная погрешность?
5. Привести примеры получения приближённых чисел.
6. Что такое значащие, верные и сомнительные цифры приближённого числа?
7. Гарантированная форма приближённого числа.
8. Форма Крылова приближённого числа.
9. Правила записи числа с явным указанием погрешности.
10. Правила округления приближённых чисел.
11. Порядок округления приближённых чисел с записью в гарантированной форме (пример).
12. Порядок округления приближённых чисел с записью в форме Крылова (пример).
13. Правила нахождения погрешности арифметических операций в прямых задачах теории погрешности.
14. Порядок нахождения погрешности арифметических операций в прямых задачах теории погрешности, с использованием пошагового метода (пример).
15. Порядок нахождения погрешности арифметических операций в прямых задачах теории погрешности, с использованием общей формулы (пример).
16. Обратная задача теории погрешности: метод равноточных аргументов (пример).
17. Обратная задача теории погрешности: метод равного влияния (пример).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зенков А. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования / Зенков Андрей Вячеславович. - Москва: Юрайт, 2022. - 122 с.

2. Волков Е. А. Численные методы : учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 252 с.